Universidade de Lisboa

Resolução de problemas com a função afim em diferentes contextos

Nicole Duarte de Jesus

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Hélia Margarida Pintão de Oliveira e coorientado pela Professora Doutora Maria Suzana Metello de Nápoles

2016

Universidade de Lisboa

Resolução de problemas com a função afim em diferentes contextos

Nicole Duarte de Jesus

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Hélia Margarida Pintão de Oliveira e coorientado pela Professora Doutora Maria Suzana Metello de Nápoles

2016

Resumo

Este relatório visa compreender de que modo alunos do 8.º ano do ensino básico resolvem problemas com a função afim, em particular em dois contextos, com e sem o recurso ao *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra. Com esta intenção, tentei perceber a que estratégias e representações recorrem os alunos na resolução de problemas com a função afim e que conhecimentos matemáticos mobilizam, nos dois contextos. O estudo que apresento foi desenvolvido no âmbito da prática de ensino supervisionada e baseia-se no trabalho realizado ao longo da minha intervenção letiva na unidade "Gráficos de Funções Afins", com uma turma do 8.º ano, da Escola Secundária de Caneças. Esta lecionação decorreu no início do terceiro período escolar, ao longo de 18 tempos de 45 minutos.

A metodologia deste estudo insere-se numa abordagem qualitativa e teve como principais métodos de recolha de dados: a observação participante, com a gravação áudio/vídeo, as produções escritas dos alunos da turma e a realização de entrevistas de tipo clínico a dois pares de alunos.

A análise dos dados evidencia que *i) segmentar o problema em etapas* e *ii) utilizar representações e esquemas* são as estratégias heurísticas a que os alunos mais recorrem, na resolução de problemas com a função afim, e realça que estas estratégias tendem a ocorrer numa fase mais inicial da resolução de problemas. Além disso, os alunos revelam privilegiar a representação gráfica e algébrica de uma função afim e, em contrapartida, evidenciam maiores dificuldades com a representação tabular. Ainda como conclusão deste estudo destaco que o recurso ao GeoGebra permite descentrar a atividade dos alunos de procedimentos de cálculo, embora as noções que mobilizaram sejam, nos dois contextos, muito semelhantes. Na resolução de problemas, a utilização do *software* promoveu a cooperação entre alunos do mesmo par e permitiu o desenvolvimento de estratégias menos demoradas. Quanto aos conceitos mobilizados, na análise de dados foi percetível que, comparativamente, os alunos que recorreram ao GeoGebra revelaram maior destreza ao interpretar a representação gráfica de uma função afim, enquanto os alunos que optaram por não usar este recurso, em geral, mostraram dominar a notação algébrica.

Palavras-chave: função afim, resolução de problemas, heurísticas, GeoGebra, 3.º ciclo

Abstract

The aim of this report is to address how the dynamic geometry software GeoGebra influences eighth graders while solving problems with the affine function when compared to the ones that did not use this software. With this aim in mind, I tried to understand, in the two above scenarios, which strategies and representations the students used while solving problems with the affine function and also what was the pre-acquired mathematical knowledge they resorted. This study was part of my supervised teaching practice and was based on my teaching intervention, specifically when I taught the “Graph of Affine Functions” unit to a 8th grade class at Escola Secundária de Caneças. This unit started to be taught in the beginning of the third school term and was taught throughout eighteen 45-minutes lessons.

The research methodology follows a qualitative approach and has as main data collection methods audiovisual recordings of participant observation, students’ written answers to problems and clinical interviews to two pairs of students.

The data analysis reveals that i) breaking down the problem into steps and ii) making representations and schemes are the heuristic strategies that the students choose more when solving problems with the affine function and also these strategies usually are used in an initial stage of problem solving. Besides, the students tend to prefer graphic and algebraic representations of the affine function, while they have more difficulties with the numeric representation. Also I can also conclude that when students used GeoGebra software they were less centered in calculus procedures, even if the mathematical notions were, in the two scenarios, very similar. Furthermore, the software promoted the cooperation between students of the same pair and allowed the students to think of less time-consuming heuristics. In terms of resorted concepts, the data analysis allows concluding that the GeoGebra users demonstrate to know how to interpret a affine function graph, whereas the non-users show to have knowledge of the algebraic notation.

Key words: affine function, problem solving, heuristics, GeoGebra, middle school.

Agradecimentos

Este trabalho resulta de muitas horas, dias, meses e anos de investimento… sozinha não teria conseguido, nem faria sentido. Por isso, agradeço profundamente a todos os que, de alguma forma, contribuíram para este trabalho.

Começo com um agradecimento, do tamanho do mundo, à minha família: aos meus pais, Ivone e Francisco, por me permitirem sonhar; à minha irmã, Isa, por ser a minha motivação; aos meus avós, Avó Carmo, Avô Zé e Avó Lurdes, por serem um exemplo para mim e; ao avô Carlos, por continuar a olhar por nós! Todas as palavras são poucas para descrever o quão estou grata por me apoiarem sempre e serem o meu refúgio, ainda que ao longo dos últimos anos tenha estado tantas vezes distante. Agradeço-vos por compreenderem a minha ausência (mesmo quando estive presente) e por me encherem de afeto aos fins de semana e me permitirem ganhar folego por mais umas semanas. Os telefonemas diários encurtam (um bocadinho) a distância, as viagens fazem esquecer a separação, mas nada poderá recuperar os momentos em que não estive presente e, por isso, estarei sempre em dívida para convosco. Obrigada por tudo!

Em seguida, quero agradecer à minha orientadora, a Professora Doutora Hélia Oliveira por toda a dedicação e contributos a este trabalho. Obrigada por todos os ensinamentos ao longo do Mestrado, em especial, obrigada por ser incansável, pelos inúmeros *e-mails* trocados, pelas reuniões em que o tempo parecia voar, pela orientação e pelos preciosos conselhos. Tudo é pouco para demonstrar como agradeço cada uma das valiosas críticas e sugestões ao meu trabalho e às aulas que lecionei, bem como agradeço todo apoio, motivação e as carinhosas palavras de incentivo nos momentos em que estive sem rumo. Mais que orientadora, a Professora Hélia é para mim uma inspiração enquanto professora e profissional, por quem tenho enorme admiração. Sinceramente, muito, muito obrigada!

À Professora Doutora Suzana Nápoles conduzo o meu particular agradecimento por estar sempre atenta ao rigor dos conteúdos matemáticos presentes neste trabalho e nas aulas que lecionei. Agradeço ainda todas as sugestões e comentários que trouxeram mais coerência ao meu trabalho.

Um agradecimento muito especial à Anabela! Obrigada pelos valiosos conselhos, pelos desafios, pelas oportunidades, pela generosidade em partilhar a sala de aula com duas aprendizas, pela total disponibilidade e por me permitir crescer tanto.

Nunca esquecerei que abriu a porta da sua sala de aula para que eu pudesse realizar o meu sonho!

Se antes não tinha Caneças no "meu mapa", após este ano passou a ser um lugar importante. Esta experiência apenas foi possível graças à Direção da Escola Secundária de Caneças, a quem expresso o meu profundo agradecimento, mais especificamente à Professora Dora e ao Professor Fernando, pelo seu apoio e disponibilidade.

À Professora Fátima Cosme e ao Professor Paulo Falardo umas palavras de agradecimento por terem sido tão prestáveis ao longo do último ano e por me terem permitido ter acesso à autêntica realidade de uma Escola. Agradeço ainda a todos os docentes e funcionários da escola, especialmente à Professora Ester, à Professora Lourdes, ao Professor Pedro Queiroz e à Dona Laura que tão bem me acolheram.

Dirijo o maior agradecimento aos alunos da "minha" turma, pelo maravilhoso ano que me proporcionaram! Muito obrigada pela vossa sensibilidade e cuidado ao longo do ano letivo, especialmente, nas aulas que lecionei e agradeço tudo o que me ensinaram enquanto professora e, sobretudo, enquanto pessoa. Já tenho saudades, muitas saudades! Desejo-vos as maiores felicidades e muito sucesso!

Gostaria ainda de agradecer aos alunos da turma da minha colega Inês, por todo o carinho e por me receberem tão bem. Obrigada, obrigada!

Ao longo destes dois anos, todos os Professores do Mestrado, em particular, a Professora Ana Henriques e Professor Henrique Guimarães, fizeram-me despertar para uma nova realidade no ensino da Matemática e voltar a acreditar que os professores são pessoas acessíveis, simpáticas e por quem se sente admiração. Muitíssimo obrigada!

Aos meus colegas de Mestrado, um enorme agradecimento! À Anália, à Cristiana, ao Hugo, à Inês, ao Manuel e ao Pedro por me terem proporcionado dois anos de muita partilha e aprendizagem. Penso que o facto de termos personalidades tão distintas nos permitiu a todos crescer e aprender bastante.

Em especial, Inês, muito obrigada pelo companheirismo e pela cumplicidade que fomos criando ao longo dos dois anos no Mestrado. Este último ano foi particularmente desafiante mas o facto de trabalharmos em conjunto amenizou um pouco esta experiência e tornou-a ainda mais rica. Foram muitos trabalhos, muitas horas, muitos telefonemas, muitas gargalhadas e algum desespero. Agradeço imenso toda a tua paciência, especialmente quando se elevava o meu nível de *stress*. Obrigada pelos momentos em que o teu espírito prático me fez reagir quando já estava a desesperar e, claro, por todo o teu apoio!

Agora um agradecimento a quem foi extraordinariamente tolerante comigo neste percurso e perdoou, por tantas vezes, a minha ausência: à Ana, ao Cardoso, à Denise, à Dina, à Isa, à Joaninha, à Naír e à Sara. Obrigada pela vossa amizade!

Margarida, muito obrigada por ouvires os meus desabafos, pela tua companhia e pela tua amizade – foi essencial nestes últimos dois anos!

À Jing e ao Rodolfo agradeço profundamente por me apoiarem nos bons e maus momentos, por toda a paciência, por me elevarem a moral e por me fazerem acreditar, mesmo quando estive em falta enquanto amiga. Estão sempre no meu coração!

Querida Joana, nos momentos mais difíceis, agarrei-me muitas vezes às tuas palavras, ao "Estamos quase lá!". Tu, que sabes o que isto significa para mim, sabes também que, de facto, não foi fácil mas hoje estou mais perto e tu,… tu continuas a inspirar-me! Muito obrigada por todos os teus conselhos, sermões, pela tua franqueza, por estares sempre pronta a ajudar e, acima de tudo, obrigada pela tua sincera amizade! Vale sempre a pena sonhar!

Sou mesmo uma privilegiada! Muito, muito obrigada, este trabalho é um bocadinho de todos vós!

Índice

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Índice de Anexos

Capítulo 1

Introdução

Este relatório tem por base a experiência da prática de ensino supervisionada que ocorreu no âmbito da unidade curricular Iniciação à Prática Profissional IV, do Mestrado em Ensino de Matemática. A minha intervenção letiva ocorreu numa turma do 8.º ano de escolaridade da Escola Secundária de Caneças, no início do terceiro período escolar do ano letivo 2015/2016, ao longo de 11 aulas.

Para além da lecionação da unidade de ensino "Gráficos de Funções Afim" desenvolvi, simultaneamente, um estudo intitulado "Resolução de problemas com a função afim em diferentes contextos". O foco deste estudo foi, precisamente, compreender como os alunos resolvem problemas com a função afim e como tiram partido da tecnologia, neste caso, do *software* GeoGebra, usado nas aulas.

O primeiro capítulo deste trabalho é composto pela explicitação das motivações pessoais para o estudo que desenvolvo e do objetivo e as questões que orientam este estudo. Por fim, descrevo de forma resumida a organização deste trabalho.

1.1. Motivações

Para mim a Matemática sempre foi sinónimo de uma prática entusiasmante, interessante e desafiadora. No entanto, ao longo do ensino obrigatório, apercebi-me que para a maioria dos meus colegas, a Matemática representava uma prática imposta e dispensável. Hoje, enquanto futura professora, mais do que procurar entender os motivos que levam a este tipo de reação face à disciplina, tenciono perceber que metodologias poderão ser peças chave para tornar a aprendizagem da Matemática significativa, entusiasmante e do interesse dos alunos, especialmente, num tema tão primordial no ensino da Matemática como a Álgebra (Ponte, Branco, & Matos, 2009).

Respeitando a organização do 4.º semestre do Mestrado em Ensino de Matemática e a distribuição dos temas a estudar pelos alunos do 8.º ano decidida pelo grupo disciplinar de Matemática da escola, a prática letiva supervisionada teria de ocorrer no 2.º ou 3.º período. Assim, e ponderando a importância que a Álgebra assume como área da Matemática, optei por lecionar a subunidade "Gráficos de Funções Afins", do domínio "Funções Sequências e Sucessões", do PMCEB (MEC, 2013).

Para além dos fatores extrínsecos, enquanto aluna tive sempre um forte interesse e preferência pelo tema Funções pelo que me senti extremamente satisfeita por ter a oportunidade de trabalhar com os alunos um conteúdo que tanto me cativa e que assumirá marcada importância no seu percurso escolar.

O conceito de função é basilar no currículo e na perspetiva de alguns investigadores deveria ser "ainda mais reforçado" (Ponte, Branco, & Matos, 2009, p. 13). A noção de função deve ser compreendida nas variadas aceções, nomeadamente, a função afim (em sentido lato) devendo ser utilizada e interpretada nas mais diversas situações e recorrendo às suas múltiplas representações (Ronda, 2015).

Uma aprendizagem só é significativa se for realizada com compreensão. O *Nacional Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2008) foca, precisamente, a importância de se aprender Matemática com compreensão, dotando o aluno da capacidade de "usar o conhecimento com flexibilidade" (p. 21), ajustando-o a situações concretas. Justamente a resolução de problemas é apontada por Ponte e Serrazina (2000) como relevante para a compreensão de conteúdos, em detrimento da exclusiva memorização procedimental.

Para que a lecionação desta unidade possa representar para os alunos desta turma uma oportunidade para estenderem as suas aprendizagens em torno do conceito de função e da resolução de problemas e para que o seu gosto pela Matemática seja ampliado, considero, tal como apoia o NCTM (2008), que a utilização de tecnologia deve traduzir-se num fator de maior empenho e interesse dos alunos, assumindo-se também como facilitador da aprendizagem. Além disso, penso ser crucial ter em consideração a "procura de respostas adequadas às diversas necessidades e características de cada aluno" (Abrantes, 2000, p. 6).

Aliando estas áreas – o tema Funções, a resolução de problemas e a tecnologia na sala de aula de Matemática – de marcada relevância e do meu interesse, emerge para mim a pertinência de articulá-las no meu estudo que, antes de mais, tem como principal finalidade que os alunos realizem aprendizagens com compreensão.

1.2. Objetivo e questões de investigação

Decorrente das considerações anteriormente expostas, o trabalho de cariz investigativo que apresento centra-se em compreender de que modo alunos do 8.º ano de escolaridade resolvem problemas com a função afim, em particular em dois contextos, com e sem o recurso ao *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra. Com vista a guiar este estudo formulei as seguintes questões de investigação:

- A que estratégias e representações recorrem os alunos na resolução de problemas com a função afim, nos dois contextos?
- Que conhecimentos matemáticos mobilizam os alunos, nos dois contextos?

Ao realizar este estudo, perspetivo ampliar os meus conhecimentos sobre o tópico Funções no que diz respeito às estratégias e dificuldades dos alunos, assim como, refletir sobre a minha atuação enquanto professora ao lecionar, pela primeira vez, uma unidade de ensino na sua totalidade.

1.3. Organização do relatório

O estudo que está na base do relatório da prática de ensino supervisionada requer algum desenvolvimento de acordo com a unidade de ensino lecionada e as características do um trabalho de cariz investigativo que realizo, pelo que o desenvolvo ao longo de seis capítulos.

Começo por desenvolver, no segundo capítulo, o enquadramento curricular e didático. Isto é, apresento uma revisão de literatura referente ao estudo do tema Funções no ensino da Matemática, bem como me debruço sobre a resolução de problemas e as potencialidades ou limitações da utilização de tecnologia nas aulas de Matemática.

Já o terceiro capítulo diz respeito à unidade de ensino lecionada. Aqui, para além de fazer uma sucinta caracterização da escola e da turma, elaboro sobre a organização da unidade de ensino, as opções que tomei e a justificação das mesmas. Além disso, incluo uma secção dedicada às tarefas desenvolvidas para o estudo do tema "Gráficos de Funções Afins", na qual integro os conceitos matemáticos trabalhados ao longo da unidade. Em seguida, junto também aspetos referentes à avaliação e, na última secção, apresento uma reflexão para cada uma das aulas que lecionei.

No quarto capítulo clarifico a metodologia adotada, ao nível da abordagem metodológica e da justificação dos participantes no estudo, e apresento os métodos e procedimentos de recolha de dados e faço referência aos instrumentos de recolha de dados e ao modo como procedo à análise dos mesmos.

O propósito do quinto capítulo é, precisamente, explicitar a análise de dados que consiste na observação da resolução de cinco problemas. Para cada um dos problemas cruzo os dados e organizo-os atendendo às fases de resolução de problemas mencionadas por Pólya (1957), às estratégias heurísticas adotadas pelos alunos, bem como apresento evidências dos conhecimentos mobilizados pelos alunos.

Finalmente, no sexto capítulo que encerra as principais conclusões deste estudo, apresento resposta às questões do estudo e, posteriormente, faço uma reflexão acerca da prática de ensino supervisionada e das minhas aprendizagens ao longo do Mestrado.

Capítulo 2

Enquadramento Curricular e Didático

Neste capítulo apresento um breve enquadramento à temática da unidade de ensino lecionada, no qual faço referência aos assuntos centrais do estudo à luz de diversas perspetivas e investigações. Neste enquadramento, darei destaque ao conceito de função, à resolução de problemas, bem como à tecnologia, no ensino e aprendizagem da Matemática.

2.1. O ensino e aprendizagem das funções

2.1.1. O conceito de função

Indiscutivelmente, a Álgebra é um dos grandes temas matemáticos (Ponte, Branco & Matos, 2009). Um domínio tão vasto e central no ensino e aprendizagem da Matemática, como a Álgebra, teve origem "na formalização e sistematização de certas técnicas de resolução de problemas" utilizadas na Antiguidade (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 5). Se inicialmente, o campo da Álgebra estava mais associado ao estudo de equações (NCTM, 2008), existe agora uma perspetiva mais ampla, que envolve neste domínio "relações matemáticas abstratas, que tanto podem ser expressas por equações, inequações ou funções como podem ser representadas por outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos" (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 7).

Neste sentido mais alargado da Álgebra, o NCTM (2008) propõe, nas Normas para a Álgebra escolar, que os programas dos diferentes níveis de escolaridade, do pré-escolar ao 12.º ano, proporcionem oportunidades a todos os alunos de:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar a variação em diversos contextos. (p. 39)

De um tema tão vasto como a Álgebra, faz naturalmente parte, como corroboram os argumentos anteriores, o conceito de função. No nosso quotidiano associamos o conceito de função a uma “relação de dependência”. Precisamente, este mesmo princípio estende-se à noção “matemática” de função.

Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes e Nápoles (1997) referem que “a noção de função resultou de um longo desenvolvimento do pensamento matemático” (p. 11). Como tal, estes autores sublinham que esta noção começou por ser difusa mas evoluiu ao longo dos séculos, tendo a definição ganho maior relevo com o trabalho do matemático alemão Dirichlet (1805-1859). Da história do conceito de função fazem ainda parte grandes nomes da Ciência como Nicolau de Oresme, Fermat, Descartes, Leibniz e Euler (entre outros), salientando-se assim o peso que a noção de função tem na história da Matemática.

É precisamente a definição de função apresentada por Dirichlet que sustenta a formulação atual para o conceito de função. O texto de Teixeira et al. (1997) fez referência à definição de função, apresentada por este matemático, em 1837:

> Uma função $f\colon A \to B$ consiste em dois conjuntos, o domínio A, o conjunto de chegada B, e uma regra que associa a cada elemento x de A (objeto) um só elemento y de B (imagem). Diz-se neste caso que a função está definida em A com valores em B. (p. 13)

Ao recuarmos ao ano de 2009, os autores Ponte, Branco e Matos sublinham, na brochura de “Álgebra no Ensino Básico”, o quão basilar é o conceito de função no currículo, referindo ainda que diversos autores destacam que este deveria ser um conceito ainda mais reforçado. Na perspetiva destes autores, “o estudo das funções visa a compreensão da noção de função, enquanto relação entre variáveis e como correspondência unívoca entre dois conjuntos, e também a capacidade de usar este conceito na resolução de problemas reais” (p. 116).

Nas orientações curriculares, segundo o PMCEB (MEC, 2013), o conceito de função surge no 7.º ano de escolaridade, sendo perspetivado o trabalhar das funções constante, linear e afim, o estudo de operações com funções e a função de proporcionalidade direta. É no 8.º ano que se propõe que sejam aprofundados os conhecimentos quanto à sua representação gráfica e quanto à variação e interpretação gráfica dos parâmetros a e b, numa equação do tipo $y=ax+b$. Já no 9.º nível de escolaridade integra-se neste domínio o estudo das funções de proporcionalidade inversa e quadrática. O estudo do conceito de função amplia-se ao nível do ensino Secundário, sem referir a dimensão que atinge no ensino Superior.

Sublinho ainda que, de acordo com o PMCEB (MEC, 2013), a representação gráfica de uma função assume maior relevo nas orientações curriculares para o 8.º ano de escolaridade, no estudo do tópico Gráficos de Funções Afins. Em particular, para o 8.º ano de escolaridade, o foco da análise de uma representação gráfica recai no estudo da função afim (linear e não linear).

2.1.2. O ensino e aprendizagem do conceito da função afim

Preston e Garner (2003) frisam que uma representação é um importante instrumento para analisar, resolver e comunicar dados matemáticos, bem como para resolver problemas. Uma representação é um meio para apoiar e fundamentar a aprendizagem, sendo que a combinação de diferentes representações pode representar um ganho de informação acerca do objeto de estudo (Friendland & Tabach, 2001; Preston & Garner, 2003).

Friendland e Tabach (2001) mencionam que as representações verbal, numérica, gráfica e algébrica são fulcrais no ensino da Matemática. Já para o estudo da noção de função, os autores Ponte, Branco e Matos (2009) dizem ser essencial atender às suas diferentes representações. Estes mesmos autores enumeram as principais e diferentes formas de representar uma função:

> (i) através de enunciados verbais, usando a linguagem natural;
> (ii) graficamente, usando esquemas, diagramas, gráficos cartesianos e outros gráficos;
> (iii) aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados;
> (iv) algebricamente, usando símbolos literais, fórmulas e correspondências. (p. 117)

Assumindo as perspetivas anteriormente referidas, qualquer uma das quatro representações mencionadas, vale por si só para definir uma função, ainda que, as distintas representações de uma função se possam complementar. Este último aspeto pode justificar o facto de, por vezes, ser necessário apresentar uma função, ou interpretá-la, como uma conjunção das diferentes representações já mencionadas. Ora, ainda na perspetiva de Ponte, Branco e Matos (2009), "no 3.º ciclo, as representações mais importantes do conceito de função são as tabelas, os gráficos cartesianos e as expressões algébricas" (p. 118).

Em particular, ao considerar a dimensão gráfica de uma função, por exemplo, ao alterar a escala dos eixos, podemos ter várias representações gráficas para uma mesma função. Porém, numa abordagem à representação gráfica de uma função, é habitual utilizar a "designação "gráfico" para referir uma sua representação" (Teixeira et al., 1997, p. 17), ainda que não seja única. Na sala de aula, atendendo ao nível de escolaridade dos alunos, pode ser, por vezes, necessário recorrer ao termo "gráfico" para fazer referência a uma das representações gráficas da função. Teixeira et al. (1997) salientam que uma representação gráfica poderá resultar do estudo analítico de uma função ou, poderá também ser um complemento a este estudo.

Tal como Preston e Garner (2003), Friendland e Tabach (2001) referem que apesar de a representação gráfica de uma função apelar à visualização pode ter algumas desvantagens já que pode ser influenciada pela escala escolhida, correndo-se o risco de ficar "visível" apenas parte do domínio da função. Considerando este constrangimento, como destaca Ronda (2015), é o conseguir ver características e propriedades de uma função nas diferentes representações que conduz a diferentes níveis de compreensão do conceito de função. A necessidade de reconhecer as diferentes características e propriedades de uma função valida não ser suficiente ter acesso a múltiplas representações de uma função para garantir uma compreensão sólida deste conceito (Consciência, 2013).

Deste modo, é urgente promover contextos em sala de aula que vão além do simples contacto com as representações, e que permitam também, compreendê-las, interpretá-las e assumi-las como parte integrante de uma função. Assim, tal como referem Carraher, Martinez e Schliemann (2008, citados por Ayalon, Watson, & Lerman, 2015), para a compreensão e apropriação do conceito de função será necessário reconhecer as suas diferentes representações, identificar, em cada uma delas, características, e comparar estas propriedades nas diferentes representações.

Ao trabalhar a função afim, linear ou não linear, os alunos experimentam diversos tipos de dificuldades, por exemplo, a dificuldade em "fixar terminologia" e de "lidar eficazmente com a simbologia" retratadas por Ponte, Branco e Matos (2009, p. 122) – por exemplo, dada uma equação reduzida $y = ax + b$ de uma reta, identificar a como declive e b como ordenada na origem. Estes autores sugerem que se desenvolva o trabalho com funções em situações contextualizadas de forma a que estas designações sejam progressivamente mais familiares para os alunos. Também Loureiro (2013), no seu trabalho com a função afim, indica que os alunos apresentam dificuldade na construção gráfica, manifestando tendência a considerar apenas valores positivos para a variável, e ainda, algum embaraço na compreensão da relação entre variável dependente e independente. Já Candeias (2010) frisa no seu estudo incidindo sobre o contributo de tarefas de exploração para a aprendizagem de funções, que as maiores dificuldades dos alunos residem nas conexões entre diferentes representações. Acrescento ainda que diversos trabalhos referem que a utilização de diversas representações promove a aprendizagem e a mobilização do conceito de função (Canário, 2011; Candeias, 2010; Loureiro, 2013).

Para promover a superação das dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito de função, como refere Kaput (1992, citado por Gafanhoto e Canavarro, 2014) "uma estratégia é trabalhar num ambiente que proporcione múltiplas representações, em que as desvantagens de umas possam facilmente ser colmatadas pela combinação com as outras" (p. 117).

2.2. A resolução de problemas

As tarefas, no ensino da Matemática, são elementos chave da planificação dos professores (Ponte, 2005). O mesmo autor frisa ainda que estas tarefas devem ser diversificadas, estar contextualizadas e podem ser mais ou menos complexas, envolvendo um trabalho de maior ou menor duração.

Ao expor a sua visão, Dietiker (2015) questiona sobre o tipo de propostas, nomeadamente tarefas, para a sala de aula que poderão cativar os alunos. Para além de atender às características das propostas que faz aos seus alunos, é de extrema importância que o professor tenha "atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula" (Ponte, 2005, p. 2). Como diferentes tipos de tarefa matemática, este último autor, destaca os exercícios, os problemas, as investigações, os projetos e as tarefas de modelação. Nesta perspetiva de Ponte (2005), os tipos de tarefa referidos distinguem-se, essencialmente, por quatro fatores:

- grau de desafio matemático que representa para o aluno – que pode ser mais ou menos elevado;
- grau de estrutura da tarefa – classificando uma tarefa "fechada" no caso em que é "claramente dito o que é dado e o que é pedido" (p.7) ou de tarefa "aberta" caso exista algum tipo de indeterminação no que é dado e/ou pedido;

- duração da tarefa – isto é, pelo tempo que é necessário investir na realização da tarefa;
- contexto da tarefa – que pode ser puramente matemático, de realidade ou de semi realidade.

De facto, é inevitavelmente questionarmo-nos sobre o que é um problema. Na perspetiva assumida por Ponte (2005), um problema é uma tarefa matemática de tipologia fechada com um elevado nível de desafio. O problema, enquanto tarefa matemática, pressupõe inúmeros benefícios para a aprendizagem de conteúdos, já que, e segundo Ponte (2005), ainda que tenha uma resposta mais fechada é promotor do raciocínio matemático dos alunos, aliando-se a esta característica, o representar um considerável grau de desafio para os alunos. Parte do referido desafio está relacionado com os diferentes contextos onde os problemas podem surgir, o que, de acordo com este autor, é indispensável para ter uma "efetiva experiência Matemática" (p. 17).

A definição de problema não assume um único entendimento para diversos autores. Para Kantowsky (1977, citado por Fernandes, 2013), "um indivíduo está perante um problema quando se confronta com uma questão a que não pode dar resposta, ou com uma situação que não sabe resolver, usando os conhecimentos imediatamente disponíveis" (p. 163). Lester (1980) adiciona à definição anterior que, um problema é uma tarefa na qual não dispomos, *a priori*, de uma estratégia para o resolver.

A perspetiva de Pólya (1957), anterior às duas últimas, parece ter impulsionado uma definição para problema. No entanto, é Schoenfeld, em 1985, que expressa na sua obra que a dificuldade em definir "problema" prende-se com o facto de, para diferentes alunos, uma tarefa matemática (como um problema) pode representar níveis de desafio distintos. Assim, o autor assume que a designação de problema não está somente relacionada com tarefa mas, tem uma estreita ligação com a tarefa e o grau de desafio que essa mesma representa para o indivíduo. Também Schoenfeld (1985) detém a perspetiva de que se o indivíduo dispõe de uma estratégia prévia para resolver a tarefa, esta é um exercício e não um problema.

Abrantes (1989) refere que um "'bom problema' é uma noção relativa não só porque depende . . . dos conhecimentos prévios de que o aluno dispõe mas também por outras razões de natureza educativa" (p. 9). Isto significa que também é fundamental que o aluno tenha interesse em resolver o problema (Pólya, 1957), bem como é importante tentar garantir que o problema permite conexões, nomeadamente, matemáticas (Hewson, 2011), e, "ter em conta a *variedade* das experiências de aprendizagem proporcionadas ao aluno (Abrantes, 1989, p. 9). Mais recentemente, Dominic Manuel (2010, citado por Freiman & Manuel, 2015), dá também destaque às características de um "bom problema" como uma tarefa matemática na qual é imprescindível atender à contextualização, à abertura (quanto às estratégias e respostas), às múltiplas interpretações e à complexidade na resolução do problema, e adicionalmente. Freiman e Manuel (2015) realçam ainda que um "bom problema" obriga ao seu resolvedor que utilize estratégias singulares, ao invés de um algoritmo.

Se a "resolução de problemas constitui uma parte integrante de toda a aprendizagem Matemática" (NCTM, 2008, p. 57), então não deve aparecer isolada ou como resultado de um conteúdo específico. Na mesma página, o NCTM (2008) reforça que "bons problemas devem integrar uma variedade de tópicos e envolver Matemática significativa" (p.57). Desde modo, referem também que se os problemas forem sujeitos a uma criteriosa seleção, poderão estimular a aprendizagem Matemática, habilitando os alunos para novos conhecimentos matemáticos. Mais geralmente, Ponte (2005) recorda que Pólya mencionou que "o professor deve propor problemas aos seus alunos para que estes se possam sentir desafiados nas suas capacidades matemáticas e assim experimentar o gosto pela descoberta" (p.3).

No subtópico "Gráficos de Funções Afins", o Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico (PMCEB) (MEC, 2013) contempla a resolução de problemas com a função afim "em contextos diversos" (p. 65). É uma orientação curricular que, ao sugerir a resolução de problemas em diversos contextos, pode remeter também para a resolução de problemas em contextos tecnológicos. Tal aspeto foi crucial para os contextos em que pretendo desenvolver o meu estudo em torno da resolução de problemas com a função afim.

Já que o estudo da função afim (linear e não linear) permite uma forte ligação com contextos reais (Ponte, Matos & Branco, 2009), e que os problemas devem assumir um contexto realista ou pelo menos significativo para os alunos (Ponte, 2005), parece-me de todo pertinente articular o estudo da função afim, no sentido mais lato, com a resolução de problemas, promovendo a construção ativa e significativa de conhecimentos por parte dos alunos.

Existe concordância de muitos autores, como refere Ponte (2005), que a atividade que os alunos realizam e a reflexão sobre essa mesma aprendizagem constituem o binómio principal da sua aprendizagem. Nesta linha, emerge a questão: *O que é resolver um problema?*. É George Pólya (1957), matemático húngaro, que apresenta um modelo com quatro fases - etapas constituintes do processo de resolução de problemas – e que, atualmente, constituem ainda um modelo de referência.

De acordo com Pólya (1957), as etapas de resolução de problemas podem ser apresentadas como:

- Compreender o problema. Nesta fase, o principal objetivo é consiste em interpretar o enunciado e identificar os dados - os fornecidos e os omissos, nomeadamente a incógnita.
- Estabelecer um plano. Aqui, é fundamental delinear a estratégia a seguir, definir o roteiro para alcançar a resposta - podendo mostrar-se necessário subdividir o problema inicial.
- Executar o plano. Está relacionado com o plano que foi estabelecido, na medida em que, é nesta fase que se concretiza o plano anteriormente traçado, em que surgirá o teste do plano delineado, bem como poderão surgir a formulação de conjeturas.
- Análise retrospetiva ("*look back*"). De forma resumida, esta é a fase de "avaliação" do percurso feito até ao momento na resolução do problema. A validação das conjeturas anteriormente elencadas ou o abandono das mesmas poderão traduzir-se num ampliar da compreensão do problema, retrocedendo a fases anteriores da sua resolução com o objetivo de definir uma nova estratégia. Desta análise retrospetiva podem mesmo surgir novas questões e extensões do problema inicial.

Como se pode perceber, as fases propostas por Pólya não têm uma ordem definitiva, já que, ao longo de todo processo poderão ser construídas ou abandonadas estratégias e conjeturas, sendo este um processo, por vezes, cíclico.

No modelo de Pólya, está bem presente a noção de estratégia durante a resolução de um problema. Por vezes, estas estratégias de resolução de problemas são designadas por heurísticas. Como frisa Schoenfeld (1985), as heurísticas "são regras de ouro para resolver problemas com sucesso" (p. 23), ainda que também mencione a importância, por exemplo, do conhecimento matemático. *Mas, em Matemática, que estratégias heurísticas para a resolução de problemas poderemos considerar?*

Numerosas são as estratégias de resolução de problemas que poderemos referir (NCTM, 2008). Desse vasto conjunto de estratégias basear-me-ei, essencialmente, nas estratégias heurísticas já mencionadas por Pólya (1957) e Schoenfeld (1985) e farei referência às que se enquadram no contexto deste trabalho que realizo. Em seguida apresentarei estratégias heurísticas que poderão emergir na resolução de problemas com a função afim:

- Utilizar representações e esquemas. Recorrer a diagramas, tabelas, representações gráficas ou outras representações pictóricas como estratégia para visualizar e interpretar o problema. Esta pode ser uma estratégia de abordagem ao problema, por exemplo, através de um esboço (adaptado de Schoenfeld,1985).
- Representar. Valer-se de pessoas ou objetos para expor fisicamente o que é descrito no problema (Fan & Zhu 2007).
- Tentativa e erro. É uma abordagem experimental ao problema, sendo que o princípio desta estratégia prende-se com alcançar uma resposta a partir da escolha aleatória de um valor inicial. Após a escolha do valor, a etapa seguinte passa por validá-lo ou não como resposta ao problema. Caso seja necessário, a etapa seguinte baseia-se no repetir o processo com outro valor, num número finito de tentativas, com o objetivo de alcançar a resposta (Eisenmann, Novotná, Pribyl & Brehovský, 2015) ou, pelo menos, uma aproximação da mesma (Fan & Zhu 2007).
- Identificar um padrão. Traduz-se no reconhecer de características comuns, relações ou diferenças presentes nas "variáveis" ou parâmetros do problema (adaptado de Pólya, 1957; Schoenfeld, 1985).
- Listar todas as possibilidades. Poderá consistir em mencionar todas as possibilidades para a situação dada e procurar a resposta (Fan & Zhu 2007) ou organizar os dados, por exemplo, numa tabela.
- Introduzir elementos auxiliares. Acrescentar dados, assumir elementos auxiliares ou atribuir valores concretos a determinados parâmetros para tornar o problema compreensível ou mais acessível (Fan & Zhu, 2007). No caso de problemas aritméticos ou algébricos, esta estratégia pode passar por introduzir um número ou uma função (Eisenmann, et al, 2015).

- Segmentar um problema em etapas ou estudar um problema mais simples (Schoenfeld, 1985). A abordagem pode passar por decompor o problema inicial, em casos particulares ou em problemas equivalentes – mais simples, cujo encadeamento permite avançar na resolução do problema.
- Questões ou procedimentos análogos. Estudar o problema a partir de outro problema análogo e que possa ser mais simples solucionar, por exemplo, através da substituição de objetos (Eisenmann et al., 2015).
- Voltar atrás ("*work backwards*"). Ao conhecer as condições iniciais e as finais, abordar o problema partindo do resultado ou solução esperada e ir regredindo para tentar encontrar as condições que eventualmente possam ter contribuído para o resultado esperado (Eisenmann et al., 2015; Fan & Zhu, 2007).

Para que as estratégias na resolução de problemas possam tornar-se mais sofisticadas, mostra-se importante que os alunos contactem com este tipo de tarefa ao longo dos diversos níveis de escolaridade, para que adquiram espírito crítico, capacidade de reflexão e para que desenvolvam um ambiente de aprendizagem estimulante – refere o NCTM (2008). Assim, considero que a resolução de problemas matemáticos poderá representar para os alunos mais do que o alcançar de um resultado, mas também uma prática desafiadora, que estimule a sua capacidade crítica, e que seja um elemento importante no desenvolvimento da sua autonomia (NCTM, 2008) – capacidades, estas, transversais na sua aprendizagem ao longo da vida.

2.3. A tecnologia no ensino e aprendizagem da Matemática

Partindo do Princípio da Tecnologia mencionado pelo NCTM (2008), que indica que "a tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da Matemática; influência a Matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos" (p.27), darei destaque ao modo como os alunos podem aprender Matemática de forma mais aprofundada, bem como ao facto de a tecnologia representar um enorme incentivo à intuição e compreensão dos alunos (NCTM, 2008).

Em seguida, procuro evidenciar o papel da tecnologia no ensino e aprendizagem da Matemática e, em particular, os contributos do recurso ao *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra no estudo do tópico "Gráficos de Funções Afins".

2.3.1. O recurso à tecnologia no ensino e aprendizagem da Matemática

Há quase duas décadas, Ponte e Canavarro (1997) referiam as potencialidades do computador para o ensino da Matemática, ao destacarem como este recurso pode transformar a forma como os alunos aprendem Matemática. Um testemunho, referido por estes autores, frisa que:

> O que mais valoriza na utilização do computador é, por um lado, a possibilidade de os alunos poderem trabalhar de forma mais autónoma, com maior sentido crítico e, por outro lado, a facilidade de lidar com representações múltiplas, estabelecer relações entre as abordagens gráficas e as abordagens analíticas, resolver problemas por métodos distintos e compará-los. (p. 207)

Atualmente, a tecnologia é cada vez mais um ambiente natural para os nossos alunos, o que está relacionado ao progresso tecnológico e ao modo como facilmente podemos ter acesso a estas tecnologias – salvaguardando alguns contextos menos privilegiados. Juntamente com esta aptidão "natural" dos alunos para a utilização da tecnologia, posso acrescentar, como refere o NCTM (2008), que a utilização de tecnologia no ensino da Matemática é importante já que proporciona imagens de ideias matemáticas, facilitando a organização e a análise dos dados, e permite a realização de cálculos de forma exata e eficaz. Assim, a articulação da aptidão dos alunos para a tecnologia e a sua utilização em sala de aula permite aos alunos "concentrar-se nas decisões a tomar, na reflexão, no raciocínio e na resolução de problemas" (NCTM, 2008. p. 27). Desta forma, ao permitir executar procedimentos rotineiros de forma quase imediata, o recurso à tecnologia favorece o envolvimento dos alunos na dinâmica de sala de aula e dá espaço ao desenvolvimento de conceitos matemáticos.

Em particular, Ponte e Canavarro (1997) referem que as potencialidades gráficas das novas tecnologias possibilitam que sejam valorizados "os aspetos mais intuitivos na construção de conceitos e na respetiva formalização" (p. 105) e que o computador viabiliza que alunos que revelam mais dificuldades em trabalhar de forma algébrica não fiquem "privados de trabalhar e progredir em Matemática" (p. 107).

O NCTM (2008) dá destaque ao modo como a "disponibilização das tecnologias" (p. 304) como recurso à resolução de problemas, nomeadamente o computador, permite aos alunos lidar com situações consideradas complexas. O National Council of Teachers of Mathematics (2008) enfatiza que a utilização do computador na resolução de problemas proporciona uma maior rapidez em alternar entre representações distintas, bem como permite proceder a operações com números "difíceis" . . . com alguma facilidade" (p. 304).

Porém, a tecnologia no ensino da Matemática, ao acarretar inúmeras potencialidades para a aprendizagem dos alunos, traduz também inúmeros desafios à prática do professor (Ponte, Branco & Matos, 2009). Terá, como indicam estes autores, de se acautelar a familiaridade dos alunos com a tecnologia, os seus interesses e preferências; bem como, será "necessário que o professor conheça bem as suas potencialidades para poder tirar partido da sua utilização no processo de ensino e aprendizagem" (Oliveira & Domingos, 2008, p. 281) e ainda; estar ciente que a "adaptação criteriosa das tarefas" – nomeadamente quando o professor recorre a um instrumento tecnológico como computador – é essencial (Gafanhoto & Canavarro, 2014).

2.3.2. O *software* GeoGebra

Um recurso tecnológico ao serviço dos grandes temas da Matemática é precisamente o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, já que permite trabalhar, num mesmo programa, Geometria e Álgebra (Oliveira & Domingos, 2008). Adicionalmente, este é um *software* gratuito (Hall & Chamblee, 2013), acessível a escolas e alunos e com inúmeras potencialidades para trabalhar o tema "Funções" pois permite estudar a representação gráfica, algébrica, tabular e numérica de uma função (Gafanhoto & Canavarro, 2013). Com as características descritas, o GeoGebra, aliado a uma ferramenta como o computador, será certamente um recurso privilegiado, para os alunos, no estudo do tema "Gráficos de Funções Afins" – já que é um instrumento que proporciona *feedback* instantâneo aos alunos, potenciando a sua autonomia, permitindo, ainda, aguçar o seu espírito crítico (NCTM, 2008).

Ao afirmarem que um *software* de Geometria Dinâmica como o GeoGebra pode representar um "importante suporte para a aprendizagem", Ponte, Branco e Matos (2009. p. 17) assumem as potencialidades da tecnologia no estudo deste tema da Álgebra, já que enfatizam como este *software* GeoGebra pode ser um meio privilegiado para a visualização das características de uma função, em cada umas das suas representações.

De acordo com Granberg e Olsen (2015), a resolução de problemas com recurso ao GeoGebra pode estimular o trabalho colaborativo e o raciocínio criativo dos alunos. Estes autores frisam que este *software* GeoGebra pode apoiar os alunos no estudo e aprendizagem do tema Funções e que, em particular no seu estudo, potenciou a colaboração e cooperação durante a resolução de problemas com este recurso, permitindo aos alunos a partilha de objetivos, conhecimentos e estratégias de resolução. Mais propriamente, a investigação de Granberg e Olsen (2015), permitiu concluir que a resolução de problemas, a pares, com recurso ao GeoGebra, promoveu o teste de ideias, a harmonização de divergências e a mobilização de conhecimentos anteriores.

As potencialidades deste *software* são também destacadas por Hall e Chamblee (2013), que concluíram na sua investigação que o ensino da Álgebra pode ser melhorado com a utilização do GeoGebra em contexto de sala de aula. Os autores referem que este recurso pode melhorar a forma como a Matemática é ensinada e aprendida e promover uma compreensão mais sólida de conceitos algébricos e geométricos, sendo, para tal, apenas necessário equipar as escolas de forma a ampliar o acesso a este recurso. A utilização de um Ambiente de Geometria Dinâmica como o GeoGebra é, portanto, uma forma de continuar a envolver e desenvolver oportunidades de integrar a tecnologia na Educação Matemática (Hall & Chamblee, 2013).

No estudo realizado por Loureiro (2013) refere-se a forma como a utilização do GeoGebra minimizou as dificuldades emergentes em tarefas de natureza mais aberta, e permitiu atenuar dificuldades na conversão entre representações, nomeadamente, entre a representação gráfica e a expressão analítica da função. Já Candeias (2010) indica que no seu estudo, apesar da utilização do *software* ter representado para os alunos uma motivação extra para a aula, estes preferiam usar processos numéricos.

De uma forma geral, são conhecidas as dificuldades dos alunos na aprendizagem das diferentes representações de uma função, mesmo com recurso à tecnologia (Daher & Anabousy, 2015). Tal como referem Daher e Anabousy (2015), o GeoGebra é um ambiente tecnológico que se enquadra no ensino e aprendizagem da Matemática, nomeadamente, nos domínios da Álgebra e da Geometria, onde se ajusta o estudo dos Gráficos de Funções Afins, já que na perspetiva destes autores, o *software* GeoGebra tem potencial para a aprendizagem de conceitos matemáticos, bem como para a aprendizagem da componente gráfica de uma função. Estes investigadores frisam, nas conclusões do seu estudo, como o recurso ao GeoGebra foi importante para que os participantes aprofundassem os seus níveis de compreensão do conceito de função pois, tal como referem, durante os momentos de discussão os alunos refinaram as suas conjeturas sobre as transformações entre representações, que observaram com a utilização do GeoGebra.

Já no trabalho de Canário (2011) que se centrou na compreensão de problemas reais com recurso à utilização dos conceitos de variação linear e de função afim, emergiu a preferência dos alunos, no estudo da variação linear, por processos tecnológicos, através do GeoGebra, salientando, portanto, a vantagem que este recurso poderá representar no estudo desta subunidade.

Por fim, e não menos importante, é o modo como o recurso às tecnologias, em particular o GeoGebra, permite criar uma dinâmica em sala de aula “favorável ao desenvolvimento da comunicação matemática. . . e à criação de uma ambiente de trabalho estimulante” (Ponte & Canavarro, 1997, p. 111) e promove uma melhoria nas “rotinas de sala de aula” (Daher & Anabousy, 2015).

Capítulo 3

Unidade de Ensino

Ao longo do ano letivo 2015/2016 acompanhei uma turma do 8.º ano de escolaridade da Escola Secundária de Caneças. Com esta turma, desenvolvi um trabalho de cariz investigativo, tendo por base a lecionação da unidade de ensino "Gráficos de Funções Afins", no início do 3.º período escolar. Neste capítulo, começarei por contextualizar a envolvência escolar, caracterizando a escola e a turma, seguindo-se o enquadramento da unidade de ensino no PMCEB (MEC, 2013) e uma explicação referente à organização e às grandes opções que tomei na lecionação da referida unidade – estratégias de ensino, tarefas elaboradas e avaliação. O presente capítulo culmina com uma síntese dos aspetos que mais destaco em cada uma das aulas que lecionei.

3.1. Contexto Escolar

3.1.1. Caracterização da Escola

A Escola Secundária de Caneças, onde decorreu a minha prática de ensino supervisionada, é a Sede do Agrupamento de Escolas de Caneças e localiza-se no distrito de Lisboa, numa zona mais periférica e a norte do concelho de Odivelas. A Sede é a única escola do Agrupamento que tem Ensino Secundário, 8.º e 9.º ano de escolaridade, reunindo também cursos profissionais, vocacionais e ensino noturno. Mais especificamente, como ilustrado pelo esquema seguinte (Figura 1), o Agrupamento de Escolas de Caneças é constituído por seis estabelecimentos de ensino: a Escola Secundária de Caneças, a Escola Básica de Castanheiros (que tem oferta formativa a nível do 2.º Ciclo do Ensino Básico e do 7.º ano do Ensino Básico) e quatro escolas Básicas de pré-escolar e 1.º ciclo do Ensino Básico.

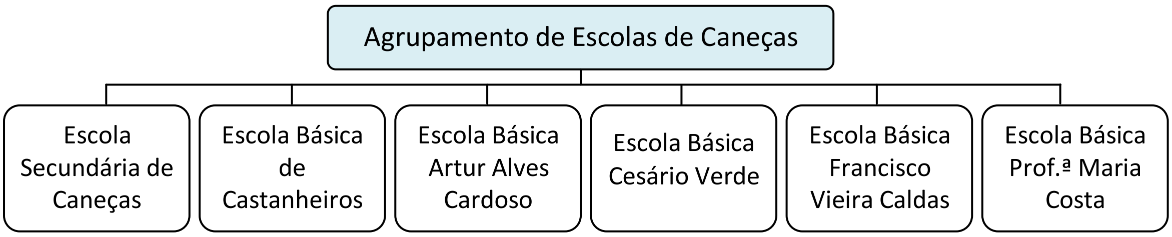


Figura 1 – Agrupamento de Escolas de Caneças

Segundo os dados do Projeto Educativo do Agrupamento de Escolas de Caneças (2015), o contexto social, económico e familiar dos alunos deste Agrupamento é maioritariamente desfavorecido e, num número expressivo dos casos, as habilitações académicas dos pais dos alunos situam-se ao nível do Ensino Básico. Também este documento refere que a população escolar do Agrupamento provém de meios essencialmente suburbanos e rurais, sendo que, aproximadamente, 40% usufrui de apoio económico escolar, designadamente, através da Ação Social Escolar (ASE).

Ao nível da gestão dos casos de indisciplina foi criado o gabinete de Gestão Disciplinar e acompanhamento de alunos. Colabora ainda com o Agrupamento uma equipa de Educação Especial que, segundo os dados dos Projeto Educativo, é "insuficiente para responder ao crescente número de solicitações" (p. 8), o que requer uma permanente análise e reflexão.

3.1.2. Caracterização da Turma

A turma com a qual realizei a prática de ensino supervisionada é constituída por um total de 30 alunos, 16 dos quais são raparigas e 14 são rapazes. No início do presente ano letivo, a média das idades destes alunos, todos de nacionalidade portuguesa, era aproximadamente 12,7 anos. Esta foi a única das turmas do 8.º ano da escola a manter a sua composição desde o ano letivo passado e é descrita por alguns dos professores como "uma das melhores turmas do 8.º ano da escola". Um dos fatores que parece corroborar esta afirmação é o número de negativas destes alunos no final do 7.º ano. No ano letivo passado, 27 dos 30 alunos da turma transitaram para o 8.º ano sem qualquer negativa, apenas três transitaram com uma negativa – um aluno com nível dois à disciplina de Português, e dois alunos com este mesmo nível à disciplina de Tecnologias da Informação e da Comunicação. No seu percurso académico, apenas cinco dos 30 alunos desta turma tiveram uma retenção – um dos alunos frequentou duas vezes o 6.º ano, enquanto quatro frequentaram por duas vezes o 7.º ano de escolaridade.

Comparativamente à maioria das turmas da escola, esta turma tem um contexto socioeconómico favorável, já que dos 30 alunos apenas cinco beneficiam da Ação Social Escolar – quatro alunos beneficiam de escalão A e um aluno usufrui de escalão B.

No ano letivo passado, esta turma vivenciou um contexto particular no que diz respeito à disciplina de Matemática já que teve, no total, cinco professores ao longo do ano letivo. Esta situação impediu que fossem abordados alguns conteúdos de 7.º ano, mais especificamente, os subtópicos do domínio Geometria e Medida do PMCEB (MEC, 2013) – como por exemplo o "Teorema de Tales" e os "Critérios de Semelhança de Triângulos", e ainda tópicos do domínio "Organização e Tratamento de Dados". Para além do que agora referi, outros tópicos foram trabalhados com alguns constrangimentos temporais.

Segundo os dados fornecidos pela diretora de turma, 57% dos alunos afirma ter ajuda no estudo e todos referem ter acesso a computador e ligação internet em casa. Ainda de acordo com estes dados é possível retirar que para seis alunos desta turma, a disciplina de Matemática é uma das suas favoritas e que, para o mesmo número de alunos, Matemática é a disciplina que menos apreciam.

Um dos alunos da turma tem Necessidades Educativas Especiais, sendo sinalizado com défice de atenção e hiperatividade e, ainda que não requeira adaptações curriculares, tem adequação no processo de avaliação mas com critérios de avaliação bastante semelhantes aos da restante turma. Semanalmente, este aluno tem um bloco de apoio, em diversos conteúdos, com uma professora de Ensino Especial.

Ao nível da assiduidade não existem situações preocupantes a relatar e ao nível da participação, segundo a professora titular da turma, apesar de "não ser uma turma tão espontânea", demonstra interesse nas aulas e mostra-se trabalhadora nos momentos de trabalho autónomo. Quanto à participação nos segmentos em grande grupo, a turma não é em geral muito participativa, no entanto, existe um pequeno nicho que faz intervenções recorrentemente. Além destes aspetos destaco quatro ou cinco alunos que, habitualmente, são muito pouco participativos.

Relativamente às classificações obtidas pelos alunos na disciplina de Matemática, no final do 1.º período escolar (Figura 2), dos 30 alunos da turma, 11 tiveram classificação de nível dois, 12 obtiveram classificação de nível três, e os restantes sete alunos obtiveram classificação de nível quatro. Ou seja, cerca de 37% dos alunos da turma obtiveram classificação negativa no final do 1.º período escolar.

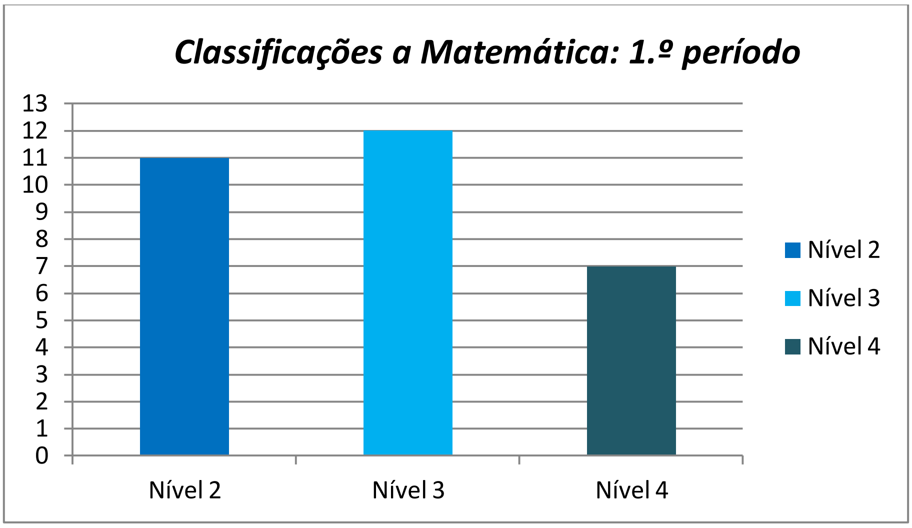


Figura 2 – Classificações dos alunos à disciplina de Matemática no final do 1.º período.

No primeiro período, segundo a Diretora de Turma, os alunos não revelaram muito método de estudo nem hábitos de trabalho. Tendo em conta as características da turma, nomeadamente, as classificações finais dos alunos no 7.º ano, a Diretora de Turma referiu que foi notório que os alunos encararam o início do segundo período com mais empenho. No entanto, o panorama global das classificações do primeiro para o segundo período manteve-se semelhante (Figura 3), ainda que o nível dois passasse a ser a classificação predominante na turma.

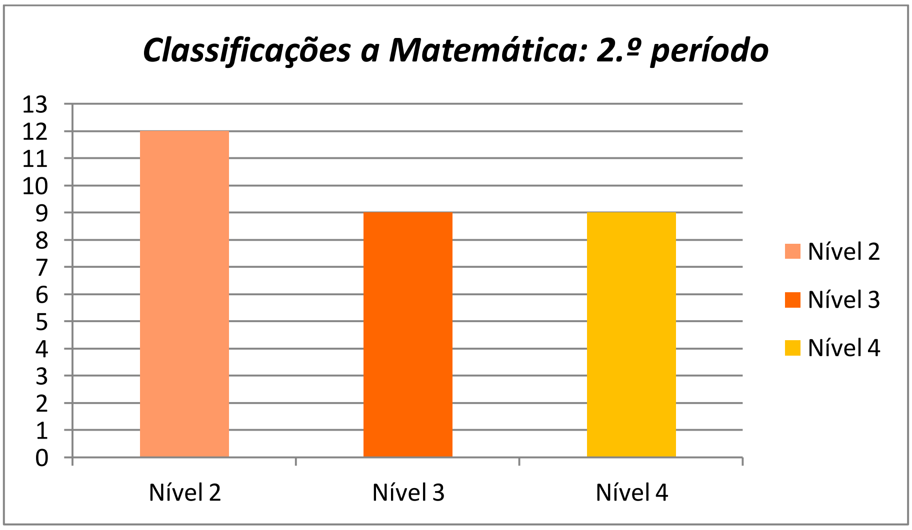


Figura 3 – Classificações dos alunos à disciplina de Matemática no final do 2.º período.

Assim, verifica-se que, no final do 2.º período (Figura 3), 12 alunos tiveram classificação nível dois à disciplina de Matemática, mais um aluno que no 1.º período.

Um fator que pode ter contribuído para esta situação relaciona-se com os conteúdos trabalhados ao longo do período, já que o domínio da Álgebra representa algumas dificuldades para os alunos e, por esse mesmo motivo, o envolvimento destes nos temas trabalhados diminui consideravelmente. Menos três alunos que no primeiro período tiveram classificação nível três e mais dois alunos tiveram classificação nível quatro.

Mais especificamente, houve alguns alunos com uma evolução positiva do primeiro para o segundo período, ainda que esse facto não seja muito evidente porque outros alunos evoluíram negativamente nesta transição de períodos – tanto quanto às classificações obtidas nas fichas de avaliação sumativa, como ao nível das atitudes e empenho na disciplina de Matemática.

Como evidencia o gráfico da figura 4, no 3.º período escolar houve uma ligeira evolução, positiva, nas classificações dos alunos desta turma, na disciplina de Matemática.

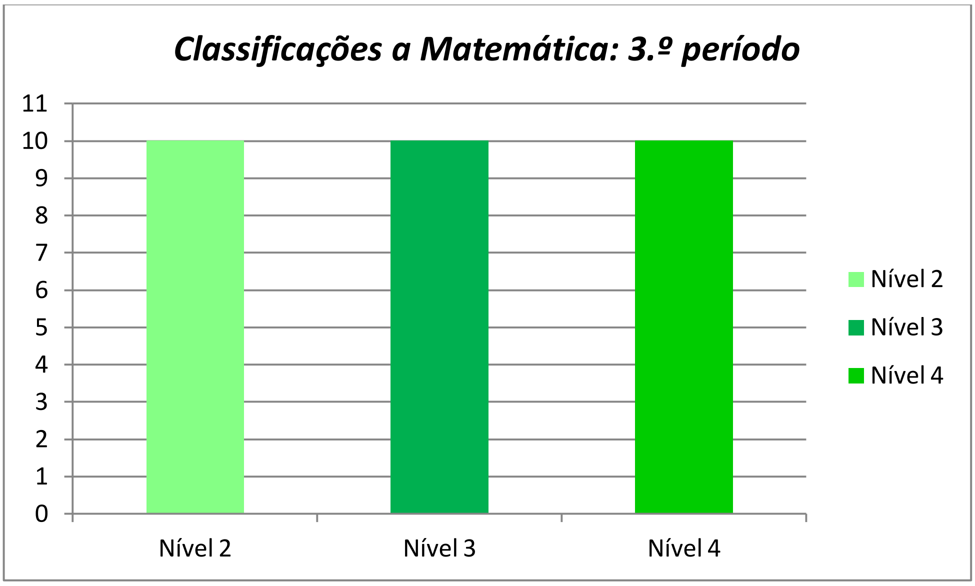


Figura 4 – Classificações dos alunos à disciplina de Matemática no final do 3.º período.

No final do ano letivo, dez alunos obtiveram classificação de nível dois na disciplina de Matemática, o mesmo número concluiu com apreciação nível três e dez alunos finalizaram a disciplina com nível quatro. Comparativamente ao segundo período, houve menos duas classificações nível dois, mais um aluno com classificação nível três e mais um aluno com nível quatro.

Uma vez que, no final do ano letivo anterior, os alunos não obtiveram qualquer classificação negativa a Matemática e como este ano um número significativo de alunos (dez) obteve essa apreciação, penso esta situação merece algum destaque. Observo que o contexto particular desta turma (quanto ao número de professores de Matemática no ano letivo passado) e os conteúdos que não foram estudados pelos alunos (que sobrecarregaram os temas abordados no 8.º ano) podem ter contribuído para este acréscimo de classificações nível dois.

3.2. Ancoragem e organização da unidade de ensino

O Programa de Matemática do Ensino Básico enuncia "Funções, Sequência e Sucessões" como um dos domínios de estudo para os alunos do 8.º ano de escolaridade. É justamente neste domínio que se enquadra o subtópico "Gráficos de Funções Afins" que foi trabalhado com os alunos nesta minha primeira experiência de ensino de uma unidade didática.

Como frisei anteriormente, apoiada pelos autores Ponte, Branco e Matos (2009), o conceito de função é central no currículo da Matemática, tendo o tema "Funções" uma evolução gradual quanto à complexidade com o avanço nos níveis de ensino. É precisamente no 7.º ano de escolaridade que é feita a primeira abordagem à temática "Funções". Na introdução a este tema, as orientações curriculares do PMCEB (MEC, 2013) perspetivam que seja feita a abordagem inicial ao conceito e à definição de função, incluindo a representação de funções em diagramas de setas, tabelas e gráficos cartesianos, trabalhando também a função constante, a linear e a afim e as operações com funções. É ainda normativo o estudo da função de proporcionalidade direta e a resolução de problemas em contextos diversificados. Faz também parte desta unidade a abordagem à definição de sequência e de sucessão.

Para as orientações curriculares do 8.º ano, o PMCEB (MEC, 2013) indica para o domínio "Funções, Sequências e Sucessões" o estudo dos "Gráficos de Funções Afins", tema que sustenta a prática letiva mencionada neste trabalho. O estudo do tema "Funções" continuará no 9.º ano de escolaridade, para o qual o PMCEB (MEC, 2013) preconiza o estudo das funções algébricas, envolvendo a função de proporcionalidade inversa e equações do 2.º grau.

Considerando a planificação anual para a disciplina de Matemática do 8.º ano acordada pelo Departamento de Matemática desta escola, antes da abordagem ao subtópico "Gráficos de Funções Afins" virá o estudo da resolução analítica de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas, seguindo-se ao estudo dos gráficos de funções afins a resolução dos referidos sistemas pelo método gráfico.

O grande objetivo preconizado pelo PMCEB (MEC, 2013) para o estudo do subtópico "Gráficos de Funções Afins" é a identificação das equações das retas no plano e a resolução de problemas em diversos contextos. Assim, realço a escolha do tema do estudo que pretendo desenvolver e da opção pelo foco na resolução de problemas.

Destaco o modo como a resolução de problemas é um meio privilegiado de aprendizagem para os alunos e para que estes possam articular conteúdos e estabelecer conexões – sendo a resolução de problemas, com ou sem o recurso ao GeoGebra, uma via para esta aprendizagem, como expressam diversos autores (NCTM, 2008; Pólya, 1967). Assim, na planificação da unidade de ensino, tentei incluir a resolução de problemas e a tecnologia como recursos à aprendizagem matemática dos alunos.

Para que possa cumprir as minhas intenções, e atendendo ao contexto particular desta turma, com cinco professores de Matemática ao longo do ano letivo transato, foi essencial perceber se existiam conteúdos que precisassem ser clarificados ou consolidados. Assim, considerei de todo pertinente a realização de uma ficha de diagnóstico (Anexo 1.1) contemplando os elementos estruturais do tópico "Funções", à partida trabalhados e consolidados no 7.º ano. Deste modo, os alunos da turma realizaram uma ficha de diagnóstico na última semana de aulas do segundo período escolar. A observação e análise das produções escritas dos alunos (Anexo 1.2) na referida ficha foi um elemento indiciador do que precisa ser trabalhado com os alunos, para que a aprendizagem deste tema seja feita de forma sólida, bem como, forneceu dados importantes para ajustar a planificação da unidade de ensino – e nos quais me apoiei para fazê-lo.

Apesar do propósito maior deste trabalho se centrar na resolução de problemas com a função afim, os aspetos conceptuais não podem ser descurados para que os alunos possam realizar aprendizagens sólidas. Assim, outra das preocupações nesta unidade, para além da resolução de problemas, é trabalhar a representação gráfica da função afim (incluindo o estudo da função constante e linear); abordar a relação entre função de proporcionalidade direta e linear, e tentar tirar partido desta conexão para a abordagem à noção de declive, sendo também trabalhado o seu cálculo analítico e interpretação geométrica. Adicionalmente, é também trabalhada a noção de ordenada na origem, incluindo a sua interpretação geométrica; bem como é feito o estudo das retas não verticais como gráficos de funções afins. Outro aspeto importante da lecionação desta unidade de ensino é a interpretação da variação dos parâmetros a e b na representação de uma equação do tipo $y=ax+b$. Por fim, considerei de toda a conveniência dar espaço à resolução de problemas com a função afim (em sentido lato) em contextos diversos, ao longo da unidade de ensino.

O Quadro 1 sistematiza as linhas orientadoras na planificação para a lecionação da unidade de ensino "Gráficos de Funções Afins", que não sendo a primeiramente elaborada, resultou dos ajustes necessários ao longo da intervenção letiva.

A unidade de ensino teve início na primeira aula do 3.º período escolar do ano letivo 2015/2016, prolongando-se ao longo de sete aulas de 90 minutos e quatro de 45 minutos (num total de 18 tempos de 45 minutos), decorrendo ao longo do mês de abril.

Quadro 1 – Esquema geral da planificação da unidade de ensino.

Tópico: Funções, Sequências e Sucessões **Subtópico:** Gráficos de funções afins			
Aula	**Tópicos da aula**	**Objetivos**	**Tarefas**
Aula 0 16 março (45 minutos)	- Ficha de diagnóstico.	- Identificar aprendizagens dos alunos no subtópico "funções" do 7.º ano.	- Ficha de diagnóstico
1.ª aula 4 abril (90 minutos)	- Conceito e definição de função; - A função de proporcionalidade direta; - A função linear; - A representação gráfica: a função de proporcionalidade direta e a função linear; - A função constante.	- Relacionar situações de proporcionalidade direta com funções de proporcionalidade direta; - Relacionar funções de proporcionalidade direta com funções lineares; - Recordar as representações de uma função linear: numérica, algébrica e gráfica; - Reconhecer a constante de proporcionalidade em diferentes contextos: múltiplas representações; - Interpretar uma função constante.	- Ficha de Trabalho n.º1
2.ª aula 6 abril (45 minutos)	- A função linear; - A noção de coeficiente de x numa função linear; - Gráfico de uma função linear.	- Interpretar a expressão algébrica e a representação gráfica de uma função linear; - Reconhecer e interpretar o coeficiente de x na função linear; - Representar graficamente uma função linear.	- Ficha de Trabalho n.º2
3.ª aula 7 abril (90 minutos)	- A função afim; - A noção de coeficiente de x e de termo; independente, numa função afim;	- Recordar as representações de uma função linear: numérica, algébrica e gráfica; - Representar algebricamente e graficamente uma função afim; - Relacionar funções lineares com funções	- Ficha de Trabalho n.º3

	- Gráfico de uma função afim.	afins; - Reconhecer a imagem de um como coeficiente de x , dada uma função linear; - Resolver problemas com as funções lineares e afins.	
4.ª aula 11 abril (90 minutos)	- A função afim em diferentes representações; - Noção de declive, de ordenada na origem e respetivas interpretações geométricas.	- Representar algebricamente e graficamente uma função afim; - Relacionar funções lineares e funções afins; - Reconhecer o gráfico de uma função afim como a translação do gráfico de uma função linear segundo um vetor; - Reconhecer, dada uma função linear, a imagem de um como coeficiente de x ; - Identificar que as retas não verticais que passam na origem representam gráficos de funções lineares; - Interpretar a função linear e a função afim atendendo a diferentes contextos; - Resolução de problemas com a função afim, com recurso ao *software* GeoGebra; - Recordar as noções de declive e ordenada na origem; - Identificar geometricamente e algebricamente a ordenada na origem; - Identificar geometricamente o declive de uma reta; - Recordar a noção de paralelismo.	- Ficha de Trabalho n.º3 (continuação) - Tarefa "Funções no GeoGebra"
5.ª aula 13 abril (45 minutos)	- A função afim.	- Consolidar as noções de declive e ordenada na origem; - Consolidar a noção de gráfico de uma função afim como translação de uma função linear, e reciprocamente; - Representar algebricamente e graficamente uma função afim; - Representar algebricamente uma função afim, dada a representação gráfica de uma função linear com o mesmo coeficiente; - Determinar a interseção do gráfico de uma função afim com os eixos coordenados.	- Tarefa "Funções no GeoGebra" (continuação)
6.ª aula 14 abril (90 minutos)	- Cálculo analítico do declive; - Paralelismo de retas; - A reta não vertical.	- Identificar o coeficiente de uma função linear como o declive de uma reta; - Consolidar a noção de que as retas não verticais que passam na origem representam gráficos de funções lineares; - Reconhecer e calcular o declive de uma reta como $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$, para $A(x_A, y_A)$ e	

		$B(x_B, y_B)$ pontos da reta, e $x_B \neq x_A$; - Reconhecer retas paralelas como retas que têm o mesmo declive.	
7.ª aula 18 abril (90 minutos)	- A função afim nas diferentes representações. - Gráficos de funções afins.	- Consolidar o cálculo analítico do declive de uma reta; - Resolver problemas com a função afim, com recurso ao *software* GeoGebra; - Reconhecer, a representação gráfica de uma reta com declive negativo.	- Tarefa "Um passeio de bicicletas"
8.ª aula 20 abril (45 minutos)	- Gráficos de funções afins; - A reta vertical e a reta horizontal.	- Consolidar a noção de declive de uma reta; - Identificar que todos os pontos de uma reta vertical têm a mesma abcissa; - Reconhecer a equação de uma reta vertical como $x = c$ e que essa reta passa no ponto de coordenadas $(c, 0)$; - Reconhecer que o declive da reta horizontal é nulo.	
9.ª aula 21 abril (90 minutos)	- Gráficos de funções afins.	- Interpretar a função em diversas representações; - Consolidar a noção de declive; - Resolver problemas com a função afim; - Determinar a ordenada na origem recorrendo a um outro ponto da reta.	- Ficha de Trabalho n.º 4
10.ª aula 27 abril (45 minutos)	- Gráficos de funções afins.	- Consolidar os conteúdos da temática "Gráficos de Funções Afins"; - Esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação sumativa.	
11.ª aula 28 abril (90 minutos)	- Dízimas finitas e infinitas periódicas; - Equações do 2.º grau; - Gráficos de funções afins.	- Realização do teste de avaliação sumativa.	- Ficha de avaliação sumativa

3.3. Estratégias de ensino

Como referido na fundamentação teórica, a compreensão do conceito de função é tanto mais sólida quanto as características que se reconhecem de uma função nas diferentes representações (Ronda, 2015). Tendo este aspeto em consideração, para a lecionação da unidade de ensino "Gráficos de Funções Afins" foi importante adotar, no decorrer dos 18 tempos de 45 minutos, estratégias diversificadas. Ao aliar a estes aspetos o foco do meu estudo, e para que os alunos possam ter um papel ativo na sua aprendizagem matemática, perspetivo como linha orientadora, da lecionação das aulas, o trabalho exploratório (Ponte, 2005).

Esta opção está também relacionada com os segmentos de aula característicos desta abordagem apontados por Oliveira, Menezes e Canavarro (2012), que, para além dos momentos de trabalho autónomo, incluem a apresentação da tarefa, a discussão da mesma e a sistematização das aprendizagens. Nos momentos de discussão e, tal como é habitual na sala de aula, tive como objetivo que os alunos apresentassem as suas resoluções, sempre que possível, de modo a estimular a interação entre os alunos e as suas capacidades interrelacionais.

Saliento que privilegiei uma abordagem exploratória mas, naturalmente, assumindo estratégias diversificadas, também para alcançar o modo de trabalho mais vantajoso para a turma, em geral, e para cada aluno, em particular, desenvolvi propositadamente aulas com tarefas mais convencionais como, por exemplo, exercícios de aplicação, numa perspetiva de consolidação ou agilização de determinados procedimentos.

Assim, ao longo desta unidade de ensino tive como objetivo que a atividade matemática dos alunos incluísse a resolução de problemas, tarefas de exploração, abarcando também exercícios de aplicação, e tarefas que potenciassem a utilização do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra – de acordo com as potencialidades da tecnologia na aprendizagem da Matemática (Hall & Chamblee, 2013; NCTM, 2008; Ponte, Branco & Matos, 2009) e com o foco do meu estudo.

Outra preocupação presente ao longo da preparação da lecionação desta unidade de ensino relaciona-se com os moldes de funcionamento habituais na sala de aula de Matemática. Dado que já tinham decorrido dois terços do ano letivo, não me pareceu adequado recorrer a estratégias muito distantes das comummente adotadas.

Para além das ações apontadas por Roldão (2009) para o desenvolvimento de uma estratégia de ensino, tive também consciência que, ao longo deste processo, mesmo planeando meticulosamente as situações de ensino aprendizagem, no decorrer da lecionação poderiam surgir situações que me levariam a alterar o meu plano inicial. Daí a minha perceção, ao longo da lecionação das aulas, que um professor deve "ser flexível na execução do seu plano de trabalho" (Abrantes, 1985, p. 1). E, inegavelmente, surgiram situações no decorrer da lecionação que conduziram ao ajuste do plano inicial.

Remetendo para as características da turma, com 30 alunos e os 32 lugares disponíveis na sala de aula, a acomodação é, por regra, a pares. Desde o início do ano letivo foi incentivado o trabalho colaborativo em sala de aula – tendo em conta as potencialidades para a capacidade de comunicação matemática, para a negociação de significados e para o incentivo à interação com compreensão, entre colegas (Oliveira, Canavarro & Menezes, 2012). Se, nos primeiros tempos, este não era o modo de trabalho natural para os alunos, com o passar do tempo, naturalmente, estes apostam mais no trabalho colaborativo. Assim, é também esta a perspetiva que tenho do ensino da Matemática, sendo portanto uma abordagem que segui no decorrer dos momentos de trabalho autónomo. Nos restantes segmentos da aula perspetivei fomentar a dinâmica e a discussão coletiva em grupo turma, sendo minha intenção promover a interação entre os alunos.

Os recursos da sala são também elementos essenciais para o decorrer da lecionação da unidade de ensino. Na sala de aula onde a turma tem habitualmente a disciplina de Matemática existem quadros brancos e, antes do começo da aula, são disponibilizadas as canetas necessárias. De esclarecer ainda que são importantes recursos para o trabalho dos alunos os materiais de desenho e medida, para que possam fazer a representação gráfica das funções afins e, ainda, o acesso a computadores com o *software* GeoGebra. Dado o relevo que a dimensão gráfica assume nesta unidade de ensino, a utilização do GeoGebra como um recurso tecnológico no ensino e aprendizagem da Matemática, em algumas das aulas, justifica-se (tal como referido na secção 2.3.2 do Capítulo 2 deste trabalho) pelo dinamismo que este *software* proporciona, juntamente com o facto de, quanto a mim, se tornar apelativo para os alunos.

Apesar de a sala de aula ter um quadro interativo, não possui computador, pelo que o professor tem de levar o seu computador pessoal para a aula. No entanto, este quadro interativo é utilizado, por norma, apenas como local de projeção, ainda que não seja possível escrever sobre a imagem. Esta situação relatada pode parecer de pouca importância mas, na realidade é, por vezes, um entrave na sala de aula, por exemplo, nos casos em que é importante desenhar sobre a projeção.

Contemplando estes aspetos e de modo a tentar contornar estas limitações, nas aulas em que a tecnologia assumiu um papel mais preponderante, reservei a sala de informática da escola, que permite a utilização dos computadores pelos alunos, para exploração do GeoGebra. Estas trocas de sala, num total de três aulas, tiveram de ser devidamente antecipadas uma vez que a sala de informática estava ocupada e teve de ser cedida por uma outra professora.

Como é evidente na literatura, as dificuldades mais frequentes dos alunos no estudo do tema Funções são o estabelecimento de conexões entre as diferentes representações (Candeias, 2010). Ponte, Branco e Matos (2009) sublinham que no estudo das funções afins as terminologias e simbologia utilizadas representa um elevado grau de "problematicidade" para os alunos. Assim, ao longo da preparação desta Unidade, procurei ter em consideração estas possíveis dificuldades na elaboração das tarefas a propor aos alunos e na ponderação do meu papel no decurso das aulas.

Juntamente aos aspetos anteriormente referidos, considerei ser fundamental realizar uma ficha diagnóstica aos alunos, na qual fui confrontada com aspetos que precisariam ser melhor trabalhados com os mesmos, nomeadamente, conteúdos mais elementares do tema Funções de 7.º ano, sem os quais seria difícil realizar aprendizagens com compreensão no estudo da unidade de ensino "Gráficos de Funções Afins", do 8.º ano.

Assim, atendendo ao contexto referido, tentei investir, ao longo da unidade de ensino, na elaboração de tarefas que proporcionassem aprendizagens com compreensão aos alunos, incluindo a resolução de problemas que deve integrar toda a aprendizagem matemática, pois proporciona o desenvolvimento de capacidades transversais e a conexão entre conceitos matemáticos (NCTM, 2008). Investi também nos momentos de discussão em grande grupo e na utilização de tecnologia em sala de aula – mais especificamente num ambiente de Geometria Dinâmica, o *software* GeoGebra. Em particular, como na grande maioria das aulas a visualização gráfica foi central produzi diversos ficheiros no *software* para que fosse um recurso nos momentos de discussão – sendo uma mais valia pela precisão nas representações e pelo modo como permite otimizar o tempo da discussão, sem esquecer que, por ser um programa dinâmico, capta a atenção dos alunos.

Outro elemento que considerei pertinente ao longo desta prática letiva foi a proposta de trabalhos de casa aos alunos, uma vez que, dadas as restrições de tempo em sala de aula e as dificuldades dos alunos, encarei como bastante importante a realização de tarefas de consolidação.

Na preparação e planificação das aulas para a lecionação da unidade de ensino, trabalhei de forma colaborativa, com a minha colega da prática de ensino supervisionada, que lecionou a mesma unidade. Assim, a preparação das tarefas e fichas de trabalho utilizadas ao longo das aulas, bem como os planos de aula foram elaboradas conjuntamente, atendendo sempre às especificidades de cada turma.

3.4. As Tarefas

Para este estudo e, de resto, para o ensino da Matemática, a seleção criteriosa de tarefas assume um papel importante para a aprendizagem dos alunos e bastante central para o desenrolar da aula (Gafanhoto & Canavarro, 2013; Ponte, 2005). Como referem Gafanhoto e Canavarro (2013) "é em torno das tarefas que as aulas se desenrolam; elas são o ponto de partida para as experiências de aprendizagem dos alunos" (p. 2). Também a sequenciação destas mesmas tarefas é outro instrumento chave para o decorrer do processo de ensino e aprendizagem. Pelo que, ao longo da unidade, e em traços gerais, optei por trabalhar com tarefas com contextos diversificados, incluindo uma tarefa de ambientação ao GeoGebra – já que os alunos nunca tinham recorrido ao computador na aula de Matemática, nem tido contactado com um *software* de Geometria Dinâmica. No entanto, por este ser um programa dinâmico e intuitivo (Gafanhoto & Canavarro, 2013), considerei um recurso bastante válido e uma mais valia para trabalhar este tema que tanto requer a observação e análise gráfica.

Neste caso, mais que o cuidado na sequenciação das tarefas, foi fundamental, no caso dos problemas, dar especial atenção à formulação das questões para que não seja evidente a estratégia ou representação a utilizar. Assim, ao longo da unidade de ensino, trabalhei com os alunos tarefas que necessitavam a utilização do GeoGebra, tendo atenção para que resolvessem problemas exclusivamente com recurso ao *software* e outros sem este recurso. Para além disto, escolhi ainda problemas em que ficou ao critério dos alunos o recurso a utilizar na sua resolução – não exigindo explicitamente a utilização do GeoGebra.

Em seguida, apresento a descrição e os objetivos gerais das tarefas que foram preparadas para a sala de aula. Tendo em conta que no planeamento da unidade de ensino foi uma preocupação rever conceitos do tema Funções estudados pelos alunos no 7.º ano, incluo, ao longo do texto, os conteúdos matemáticos tal como foram trabalhados em sala de aula, fazendo, ainda, uma referência específica aos abordados no 8.º ano.

3.4.1. Ficha de diagnóstico

Como previamente referi, atendendo ao contexto específico da turma relativamente ao número de professores de Matemática no ano letivo passado, considerei fundamental ter um instrumento extra que me permitisse aferir com mais detalhe os conhecimentos dos alunos no tema “Funções” do 7.º ano.

Para tal, a ficha diagnóstica (Anexo 1.1) foi construída de modo a que pudesse englobar os conceitos e noções estudados pelos alunos. Deste modo, o ponto de partida para esta ficha foi o conceito de função e as diferentes representações de uma função (questão 1).

Presentes nesta ficha estavam ainda as noções de domínio, contradomínio, conjunto de chegada, objeto e imagem (na questão 2) e, na questão 3, as noções de coeficiente e termo independente de uma função, para além das noções de função constante, linear e afim. Ainda na questão 3, o objetivo foi perceber se os alunos revelavam dificuldade em calcular objetos e imagens dada a expressão algébrica de uma função ou em reconhecer um ponto pertencente ao gráfico de uma função afim.

Com a questão 4 desta ficha de diagnóstico, o objetivo foi identificar se os alunos se tinham apropriado dos conceitos de variável dependente e variável independente, bem como a identificação do domínio e contradomínio de uma função, dada a sua representação gráfica.

Para ajustar a planificação da unidade era de todo pertinente perceber se os alunos relacionavam a expressão algébrica de uma função afim à sua representação gráfica, por isso foi elaborada a questão 5.

As questões 6 e 7, embora estivessem ambas relacionadas com o raciocínio proporcional dos alunos, tem-se que em particular a questão 6 permitia identificar se os alunos reconheciam a expressão algébrica de uma função e, a questão 7, permitia perceber a reação dos alunos à interpretação de uma questão com contexto.

3.4.2. Ficha de Trabalho n.º 1

A primeira sequência de tarefas (Anexo 2.1) foi elaborada considerando a análise que fiz das produções escritas dos alunos na realização da ficha de diagnóstico, com o objetivo de consolidar os conteúdos do tema Funções trabalhados no 7.º ano de escolaridade, pelos alunos.

Com o objetivo de recordar algumas noções foi preparado um exemplo (Anexo 3.1) para ser discutido antes de os alunos iniciarem a ficha. Este exemplo foi analisado com o intuito de lembrar o conceito de função, ou seja, recordar que dados os conjuntos A e B, uma função g de A em B é uma correspondência em que a cada elemento do conjunto A (domínio da função) corresponde um e um só elemento do conjunto B (conjunto de chegada). Além do conceito de função, ao analisar este exemplo, foi também propósito esclarecer as noções de objeto, como cada elemento do conjunto A e de imagem, como cada elemento do conjunto B que corresponde a algum elemento do conjunto A. Habitualmente designa-se por D_go domínio da função g e por CD_g ou D'_g o contradomínio da função g.

Enquanto a primeira questão permita trabalhar o estudo da função de proporcionalidade direta – toda a função definida por uma expressão analítica do tipo $y = kx$, com k maior que zero e em que k é designada por constante de proporcionalidade direta – foi ainda construída de modo a que a constante de proporcionalidade estivesse associada a um contexto, neste caso, ao preço de uma fotocópia. Em particular com a alínea 1.4., a intenção foi determinar a expressão algébrica que podia traduzir esta situação, possibilitando observar que estratégia os alunos utilizariam para responder à questão 1.5.

Como esta tarefa seria trabalhada na primeira aula do período e, concomitantemente, na primeira aula desta nova temática, a questão 2 foi introduzida com o objetivo de que todos alunos conseguissem dar uma resposta e, simultaneamente, para tentar compreender o "grau" de interpretação gráfica dos alunos, dado um contexto específico. Mais precisamente, tinha como objetivo perceber como interpretariam os alunos, neste contexto, um segmento de reta horizontal e dois segmentos com inclinações distintas.

3.4.3. Ficha de Trabalho n.º 2

A ficha "Funções – parte 2" (Anexo 2.2) surgiu como complemento às tarefas da ficha anterior pois o objetivo central foi não só interpretar uma situação de proporcionalidade direta, como também partir para a sua representação gráfica, atendendo ao contexto.

Na estruturação desta ficha de trabalho existiu um cuidado especial para introduzir noções como objeto, imagem, domínio, contradomínio, coordenadas de um ponto e ponto pertencente a um gráfico. A opção de incluir estas noções esteve relacionada com as dificuldades que os alunos revelaram na realização da ficha de diagnóstico. Deste modo, as coordenadas de um ponto foram relacionadas com um par ordenado em que o primeiro elemento é designado por abcissa e o segundo por ordenada. Adicionalmente, foi intencional reforçar que a abcissa de um ponto que pertença ao gráfico de uma função tem de ser um elemento do domínio dessa função.

Como já referi, para além desta ficha permitir trabalhar uma situação de proporcionalidade direta, como uma função, a mesma foi construída de modo a que fosse possível observar as características do gráfico de uma função deste tipo, como um gráfico de pontos que estão alinhados sobre uma reta que passa na origem do referencial. Paralelamente, na elaboração da última questão desta ficha, tratando-se de uma função de proporcionalidade direta, o intuito foi também frisar que $f(0) = 0$ e $f(1) = k$, ou seja, que a imagem de zero é zero e que a imagem de um pela função f é a constante de proporcionalidade

3.4.4. Ficha de Trabalho n.º 3

Esta ficha de trabalho (Anexo 2.3) foi elaborada de forma a dar continuidade ao trabalho proposto nas fichas de trabalho anteriores, na consolidação dos tópicos basilares do tema Funções.

A primeira questão foi pensada com o intuito de estudar a função de proporcionalidade direta como uma função linear e de abordar a função afim. Neste caso, a intenção foi recordar a função linear como uma função para a qual existe um número racional a tal que $f(x) = ax$, em que se chama a ao coeficiente de f e $a = f(1)$.

Em particular, as primeiras três alíneas foram construídas para que existisse uma adesão facilitada à tarefa, pelos alunos, sendo questões sobretudo de interpretação gráfica, com algumas operações numéricas.

A alínea 1.4 centrava-se na determinação das expressões algébricas pelo que, se os alunos não o tivessem feito anteriormente, calculariam a constante de proporcionalidade como o quociente entre a ordenada e o objeto de um qualquer ponto do gráfico da função (exceto o ponto $(0,0)$), observando que, para cada uma das funções, a imagem de um corresponde a essa constante. Para além disso, tinha ainda como objetivo evidenciar o domínio das funções neste contexto, sendo realçado que a imagem de zero é zero.

A quinta alínea tinha como principal objetivo que os alunos identificassem características, gráficas e algébricas, das funções lineares, que seriam depois contrastadas com as particularidades de uma função constante, na alínea 1.6. A representação gráfica de uma função linear foi trabalhada com os alunos como uma reta que passa na origem do referencial e a função constante como sendo do tipo $f(x) = b$, em que b é uma constante e cuja representação gráfica é uma reta horizontal – ou seja, é um conjunto de pares ordenados com a mesma ordenada.

De forma global, ao longo destas primeiras alíneas, pretendi que os alunos, identificassem num contexto concreto conceitos e noções, basilares do tema Funções, com significado extra-matemático – isto é, atendendo ao contexto do problema.

A partir da alínea 1.7 o foco foi fazer emergir a expressão de uma função afim. Pelo que, neste contexto, os alunos trabalhariam com uma taxa fixa de dois euros para obter uma expressão da função j. Assim, na discussão em grande grupo, uma função afim, f, poderia ser trabalhada como soma de uma função linear com uma função constante e definida por uma expressão algébrica do tipo $f(x) = ax + b$, onde a é designado por coeficiente de x e b por termo independente.

Ao elaborar a alínea 1.8 tive como objetivo que os alunos fizessem a transformação da representação algébrica para a representação gráfica de uma função afim através do cálculo da imagem de dois. Além disso, outro propósito da alínea 1.8 foi que os alunos observassem que a representação gráfica de uma função afim resulta da translação da representação gráfica de uma função linear – fazendo também a conexão entre dois tópicos matemáticos: funções e isometrias. Assim tinha como objetivo que, na discussão em grande grupo desta questão, e com recurso ao GeoGebra, fosse evidente que as representações gráficas destas funções são duas semirretas paralelas que têm a mesma inclinação relativamente à parte positiva do eixo das abcissas (apesar de uma passar na origem do referencial e outra não). Deste modo, a representação gráfica de uma função afim resulta da translação da representação gráfica de uma função linear, segundo um vetor (e reciprocamente), em que a extremidade desse vetor coincide com o ponto em que a representação gráfica da função afim interseta o eixo das ordenadas.

Já a questão 1.9 foi criada com o objetivo de que os alunos pudessem articular as características das representações gráficas com as características das expressões algébricas de duas funções – neste caso, associar o valor da ordenada na origem à ordenada do ponto onde a reta da representação gráfica da função afim interseta o eixo das ordenadas.

A questão 2 foi pensada com o objetivo de estudar a comparação de duas funções afins, associadas a um contexto. Mais especificamente, para além do estudo de uma função dada sob a forma de representação tabular, tive como objetivo que os alunos fizessem a conversão de uma representação tabular numa algébrica e ainda, a consolidação das noções de variável dependente e independente, coeficiente de x e termo independente.

3.4.5. Tarefa "Funções no GeoGebra"

Esta tarefa (Anexo 2.4) surgiu após considerar que os alunos já tinham consolidado as suas aprendizagens relativamente às noções mais elementares do tema Funções, pelo que seria possível explorar mais aprofundadamente a representação gráfica das funções afins e, em simultâneo, ambientarem-se ao *software* GeoGebra.

Um dos principais objetivos da alínea 1.1 foi tentar que os alunos associassem de forma intuitiva uma função constante, linear, e afim à sua representação gráfica, sem ficarem "presos" ao procedimento de traçar a reta. Para além disto, como ao longo da unidade ambicionava que os alunos tivessem acesso à tecnologia na aula de Matemática, pensei esta primeira questão para que o contacto dos alunos com o *software* GeoGebra fosse simples e intuitivo.

A alínea 1.2, para além da ambientação ao GeoGebra, foi construída com o propósito de destacar que são necessários dois pontos para que seja possível traçar uma reta – aspeto que é essencial quando os alunos traçam com "papel e lápis" uma reta, dada a sua equação reduzida.

Trabalhar a função afim esteve no centro da construção da alínea 1.3, já que, para que os alunos realizem aprendizagens sólidas no estudo desta unidade de ensino, é imprescindível que estejam bastante despertos para a dimensão gráfica de uma função. Ou seja, para além da preocupação em garantir que os alunos observassem que a representação gráfica de uma função afim é um reta, seria crucial que fosse possível evidenciar a equação reduzida de uma reta como sendo do tipo $y = ax + b$, designando-se a por declive e b por ordenada na origem. Em particular, na discussão da questão 1.3 tinha como foco destacar que retas paralelas são retas com o mesmo declive e evidenciar que o valor da ordenada na origem é a ordenada do ponto $(0, b)$ que resulta da interseção da reta com o eixo das ordenadas.

A última alínea, 1.3.3, desta ficha de trabalho para além de pretender que os alunos relacionassem diferentes declives e inclinações distintas, tive ainda como propósito destacar o valor do declive como imagem de um, para cada uma das funções, de forma a, na aula seguinte, abordar a o cálculo analítico do declive.

A introdução da expressão geral para o cálculo do declive foi suportada por um ficheiro GeoGebra no qual foi apresentado a representação gráfica de uma função linear, neste caso $f(x) = 2x$. Para escrever a equação reduzida da reta os alunos teriam de identifica-la como gráfico de uma função linear, por passar no ponto (0,0) e observar que dois seria o coeficiente de x, já que, $f(1) = 2$. Por conseguinte, seria determinada a equação reduzida da reta $y = 2x$ e seria pedido aos alunos que obtivessem o valor do declive como o quociente entre a ordenada e a abcissa de um ponto da reta diferente de (0, 0) e de (1,2). De seguida, foi apresentada uma reta paralela à anterior passando no ponto (0,3) com o objetivo de desafiar os alunos a escolherem um ponto desta última reta para calcular o seu declive (recorrendo ao quociente entre a ordenada e a abcissa do ponto). Como as retas são paralelas, esta última reta teria igualmente de ter declive igual a dois, pelo que este desafio teve o intuito de que os alunos sentissem necessidade de conhecer um procedimento que permitisse calcular o declive de uma reta que não passe na origem do referencial. Deste modo foi abordada a expressão geral para o cálculo do declive de uma reta como, dados dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, distintos, pertencentes a uma reta r: o declive da reta é obtido através do cálculo de $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, com $x_B \neq x_A$.

3.4.6. Tarefa “Um passeio de bicicletas”

Considerando a sequência de tarefas apresentadas, os alunos ainda não teriam, neste momento, trabalhado numa mesma questão com funções afins em representações distintas. Atendendo a que a conexão entre diferentes representações é uma das dificuldades mais evidenciadas pelos alunos no estudo deste tema e conhecidos os benefícios dos problemas para a sua aprendizagem, a segunda tarefa (Anexo 2.5) elaborada para a lecionação da unidade de ensino “Gráficos de Funções Afins” foi estruturada com o objetivo de interpretar a função afim atendendo a diversas representações. Por ser uma questão de cariz mais aberto os alunos poderiam, caso desejassem, tirar partido do GeoGebra para interpretar e resolver este problema.

De modo mais amplo, o objetivo global na resolução deste problema foi, para além de trabalhar a função afim em diversas representações e atendendo a um contexto, promover ainda as capacidades transversais dos alunos.

Destaco ainda que esta tarefa, para além de ser indicada para trabalhar a interpretação da função afim, poderia ser interessante para, por exemplo, introduzir a resolução gráfica de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas.

Na sequência desta tarefa, e antes da ficha de trabalho seguinte, foi abordada a reta vertical com recurso a um ficheiro dinâmico do GeoGebra, como ilustrado pela Figura 5.

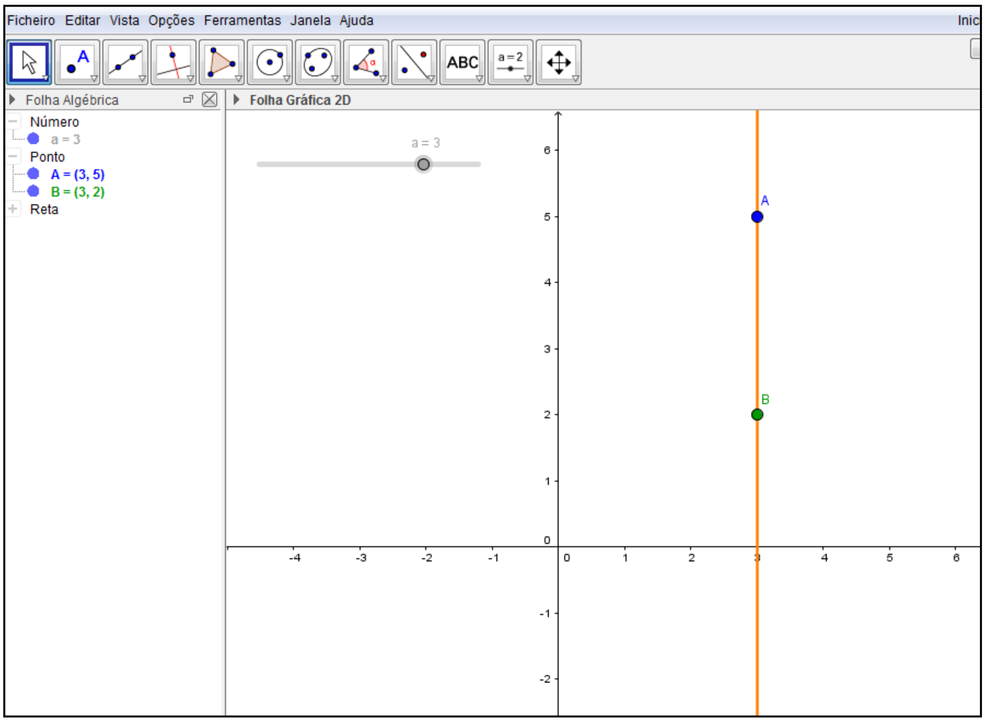


Figura 5 – Ficheiro GeoGebra utilizado na abordagem à reta vertical

Ao discutir com os alunos as representações do GeoGebra o objetivo foi evidenciar que todos os pontos da reta apresentada têm a mesma abcissa – que no caso da Figura 5 é igual a três. O mesmo exemplo foi estendido para valores negativos da abcissa, ou nulo (caso em que a reta vertical coincide com o eixo das ordenadas). Assim foi minha intenção que os alunos reconhecessem uma reta vertical como uma reta constituída pelos pontos com uma mesma abcissa, c, pelo que a sua equação é do tipo $x = c$.

3.4.7. Ficha de Trabalho n.º 4

As questões realizadas pelos alunos devem ser de natureza diversificada. Este pensamento está precisamente na base da elaboração da última ficha de trabalho (Anexo 2.6). Ora, a primeira questão, pretende ter como foco a conexão entre a Geometria e a

Álgebra, dois importantes temas matemáticos. O intuito da realização desta questão em sala de aula foi precisamente a "desconstrução" da figura geométrica e a visualização das retas suporte dos lados do paralelogramo. No enunciado desta questão foi colocada propositadamente uma perturbação cognitiva já que não é indicado qualquer dado referente à ordenada dos pontos A e B. Este aspeto acentua o seu caráter problemático, dada a necessidade de determinar a ordenada na origem da reta BC recorrendo a outro ponto da reta. Assim, nesta primeira questão, os dois últimos aspetos referidos são fulcrais nas aprendizagens dos alunos.

A questão dois da ficha de trabalho foi pensada para que os alunos mobilizassem os seus conhecimentos relativos ao declive de uma reta, associando cada uma das equações reduzidas a uma das retas sem realizar cálculos – baseando-se apenas nos seus conhecimentos relativos ao declive e à inclinação das retas.

Já a terceira questão tem como objetivo que os alunos reconheçam retas paralelas como retas com o mesmo declive, e que agilizem as suas estratégias para determinar a ordenada na origem da equação de uma reta, conhecendo um outro ponto da mesma.

Finalmente, a questão 4, surge com o objetivo de dar enfoque à conexão entre a Geometria e a Álgebra, centrando-se, mais especificamente, em reconhecer um eixo de reflexão como uma reta. Ultrapassando esta interpretação, a questão transforma-se em pequenas tarefas para os alunos, sendo necessário trabalhar o cálculo analítico do declive e observar o valor da ordenada na origem para escrever a equação da reta.

3.5. A avaliação

A avaliação é parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, ou seja, de acordo com o NCTM (2008, p. 23), "a avaliação deve apoiar a aprendizagem de uma Matemática relevante e fornecer informações úteis quer para os professores, quer para os alunos". Atendendo a este princípio do NCTM, perspetivo a avaliação como uma interação reguladora entre professor e alunos, de modo a melhorar quer a aprendizagem dos alunos, quer as decisões do professor sobre o processo de ensino-aprendizagem, tal como referem Pinto e Santos (2006). Ou seja, a avaliação reguladora permitirá identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos, aspetos que precisem ser consolidados e, simultaneamente, obter dados que me permitam refletir sobre a minha própria prática. Neste sentido, tenciono privilegiar o *feedback* aos alunos via questionamento oral para tentar aceder ao seu raciocínio, à sua adesão à tarefa e com o objetivo de promover a reflexão e a autoavaliação dos alunos. Tal como o NCTM (2008) menciona, a avaliação deve ser contínua e uma atividade rotineira na sala de aula.

À semelhança das normas habituais de avaliação decididas pela Escola e pelo grupo disciplinar de Matemática da mesma e, de forma a diversificar os instrumentos de avaliação, realizam-se momentos de avaliação mais formal, sob a forma de registo da participação oral e intervenções dos alunos, através do preenchimento de uma grelha habitualmente usada pela professora titular da turma – com o objetivo de valorizar o investimento dos alunos no trabalho, dentro e fora da sala de aula. Para além desse objeto de avaliação sumativa e de acordo com as duas fichas de avaliação sumativa, estipuladas para realizar ao longo de cada período escolar, no final da lecionação deste conjunto de aulas, existirá uma aula para a realização de uma ficha de avaliação, com a duração de 90 minutos. Para além de um elemento de avaliação sumativa, perspetivo que os alunos também o vejam como um instrumento regulador da sua aprendizagem e; para mim, enquanto professora da turma naquela unidade de ensino, me permita refletir sobre a minha prática.

Ao longo da lecionação das aulas existe ainda uma importante componente de avaliação formativa para mim, enquanto professora, através da recolha das produções escritas dos alunos para efeitos do estudo de cariz investigativo que desenvolvo e que constituem também elementos informativos, por exemplo, acerca do trabalho realizado pelos alunos e da tarefa, isto para que possa adequar algum aspeto nas aulas seguintes ou ajustar a tarefa em futuras utilizações.

Por fim, e como primeiro elemento de avaliação utilizado nesta unidade, a ficha de diagnóstico que tem um carácter essencialmente formativo, para ajustar o planeamento da unidade de acordo com a análise realizada às produções dos alunos. Este instrumento de avaliação para além de formativo para a professora é um elemento de avaliação reguladora para os alunos, uma vez que, através dele é possível dar *feedback* aos alunos para conhecer os conteúdos que precisam ser melhor consolidados.

3.6. As aulas lecionadas

Em seguida apresento a descrição e reflexão sobre cada uma das 11 aulas que lecionei, cujas planificações elaboradas se encontram em anexo (Anexos 3.1 a 3.11).

3.6.1. Aula 1: 4 de abril de 2016 (90 minutos)

Atendendo ao contexto muito específico desta turma face à disciplina de Matemática (relatado no Capítulo da Unidade de Ensino), bem como aos dados resultantes da análise da ficha diagnóstica, a primeira aula desta unidade de ensino (Anexo 3.1) foi planificada com o objetivo de que os alunos recordassem alguns conteúdos trabalhados no 7.º ano de escolaridade, no tema “Funções”. Assim, optei por estruturar esta aula para que pudessem ser recordadas noções basilares do tema “Funções”, fundamentais para o estudo da unidade de ensino “Gráficos de Funções Afins”.

Na primeira aula do 3.º período escolar, após ditar o sumário prossegui com o assunto da ficha diagnóstica que os alunos realizaram no final do 2.º período, tentando fazer a articulação com o que seria trabalhado nas aulas de Matemática a partir de então.

No segmento inicial desta aula apresentei aos alunos um exemplo de uma função, lembrando noções como: função, domínio, contradomínio, conjunto de chegada, objeto e imagem. A parte da aula destinada a este segmento acabou por se prolongar um pouco para além do previsto pois os alunos manifestaram alguma confusão com os conceitos em causa e foram surgindo algumas intervenções, da sua parte, que me levaram a ser, por vezes, repetitiva no esclarecimento das dúvidas. Os aspetos mencionados, em conjunto com o facto de os alunos demorarem mais tempo que o esperado a fazer os registos no caderno diário, levaram-me a gerir este momento de forma distinta da inicialmente prevista, ou seja, foi feita a sistematização oralmente a partir do quadro síntese que estava projetado e informei os alunos que na aula seguinte iria entregar o quadro síntese impresso para que colassem no caderno. Penso que poderia ter gerido este momento de forma mais eficaz, ditando a síntese para que os alunos registassem no caderno, no entanto, nas aulas seguintes já tive em consideração este aspeto, com o objetivo de otimizar o tempo em sala de aula.

Ao longo do trabalho autónomo da primeira questão, surgiu um problema técnico que impossibilitou ter luz na sala cerca de dez minutos, o que se traduziu num dispersar de alguns alunos e o atrasar do decorrer da tarefa. Ainda assim, os alunos foram continuando a trabalhar e pude contactar com algumas das suas principais dificuldades. Por exemplo, pelo menos três pares de alunos, não se recordavam das características de uma situação de proporcionalidade direta.

Na discussão em grande grupo da primeira questão, em interação com os alunos, foram relembradas as noções de variável dependente, independente, expressão algébrica e de proporcionalidade direta (entre outras). *A posteriori* penso que poderia ter enfatizado de um modo mais vincado quer a noção de proporcionalidade direta, quer a noção de constante de proporcionalidade, que foram mais destacadas nas aulas seguintes. Na discussão da última alínea pedi a um aluno que se dirigisse ao quadro para explicar a resposta do par, no entanto, este apresentou uma resolução distinta da sua abordagem inicial. O aluno indicou que resolveu a questão por tentativas e escreveu no quadro expressões que não foram muito esclarecedoras do seu raciocínio. Alguns alunos referiram mesmo que o colega "complicou um bocado", pedindo-me para explicar. Neste momento tive de corrigir algumas expressões, escritas pelo aluno, que não estavam corretas e, de forma a clarificar a situação, pedi que outros alunos apresentassem oralmente as suas estratégias. Toda esta situação descrita causou algum impasse neste segmento que, na minha opinião, foi superado com a breve explicação que fiz e com a apresentação de diferentes estratégias, que permitiram recordar outros conceitos como dízimas finitas e infinitas.

Os alunos iniciaram a resolução da segunda questão da ficha de trabalho, segmento no qual destaco a adesão dos mesmos à tarefa apresentada. Com o avançar da hora, optei por fazer a correção da grande maioria das alíneas apenas oralmente, reconhecendo que talvez tenha sido mais complicado para os alunos registarem as justificações no caderno diário. Ainda assim, destaco que, globalmente, a turma interpretou e resolveu de forma correta esta questão.

Aquando da planificação desta aula (Anexo 3.1) estava ainda pensado um momento de síntese final e outro segmento de trabalho autónomo dos alunos em questões do manual escolar, que acabaram por não se concretizar, por falta de tempo. Desta forma, e para consolidar aprendizagens, considerei ser importante realizar a síntese prevista para esta aula, na aula seguinte. As questões do Caderno de Atividades previstas no plano, não realizadas em sala de aula, foram propostas como trabalho de casa.

Neste aula, e tal como planeado, foi dada ênfase às diferentes representações de uma função, o que foi revelador de que grande parte dos alunos tem dificuldade em reconhecer diferentes representações de uma função, pelo que destaco este aspeto como merecedor de atenção nas aulas seguintes.

Um ponto, na minha opinião, bastante positivo foi a gradual adesão dos alunos à ficha de trabalho, já que, na resolução da questão 2 estes fizeram alguns comentários como “isto é muito fácil” e, além disso, todo o ambiente de sala de aula durante a realização e discussão da segunda questão da ficha de trabalho revelou envolvência dos alunos. Desta forma, dei por encerrada a aula com o sentimento de que foi uma aula produtiva para os alunos, em que ampliaram a sua confiança com a última questão da ficha de trabalho, demonstrando criatividade nos seus raciocínios, mencionando conceitos como velocidade – relacionando-o com situações reais. Por exemplo, o aluno que foi ao quadro apresentar a resolução à alínea 2.4 (Anexo 2.1), referiu que “Na primeira hora foi mais lento, fizeram menos distância que na segunda hora, muito provavelmente, porque entraram na autoestrada (...) Às 11 horas temos 40 Km de viagem feitos e às 12 horas temos 160 (…) 160 menos 40 dá 120 [Km] numa hora, ou seja, 120 Km/h, que é o limite numa autoestrada”.

Apesar de nesta aula a turma ter acompanhado o desenrolar da mesma, senti que os alunos estavam pouco participativos, tendo sido, na maior parte dos casos, forçada a solicitar intervenções por parte dos alunos. Um fator que pode ter contribuído para esta situação foi a falta de dinâmica de alguns segmentos da aula, nomeadamente, aquando a apresentação do exemplo no início da aula, penso que fui um pouco exaustiva na explicação, bem como um pouco monocórdica no tom de voz, aspetos que tentei contrariar nas aulas seguintes. Ainda assim, penso que a planificação para esta aula foi cumprida e, atendendo às condicionantes, considero que os objetivos globais foram alcançados, ainda que existam aspetos que precisam ser mais cuidados. Nomeadamente, apercebi-me que preciso sentir maior segurança na gestão dos tempos, preciso encontrar estratégias para tentar contrariar a tendência dos alunos em não participar e, além disso, acho importante dar mais vezes a palavra aos alunos.

3.6.2. Aula 2: 6 de abril de 2016 (45 minutos)

Inicialmente, para esta segunda aula (Anexo 3.2) da intervenção, estava previsto dedicar breves minutos à correção do trabalho de casa, no entanto, face ao acumular de dúvidas levantadas pelos alunos, foi necessário estender um pouco mais este segmento. Com vista a clarificar as dificuldades dos alunos, esta discussão ficou mais centrada em mim, ainda que os alunos interagissem, através do questionamento, tentando esclarecer as suas dúvidas, a participação espontânea da turma ficou um pouco aquém do desejável.

Em parte seriam esperadas algumas dificuldades no trabalho de casa e, de facto, os alunos mostraram pouca destreza em indicar a imagem de uma função dado o objeto, conhecendo-se a expressão algébrica da função, e reciprocamente. Assim, a correção do trabalho de casa, do Caderno de Atividades, foi articulada com breves explicações com o objetivo de recordar os aspetos anteriormente mencionados, bem como o conceito de função. Nesta discussão, destaco a dificuldade demonstrada pelos alunos no cálculo de expressões numéricas e em determinar imagens de uma função constante. A título de exemplo, um aluno afirmou que numa função deste tipo "não dá [para calcular a imagem] porque não dá para substituir o x", pelo que, demonstrou ser necessário relembrar aos alunos as características de uma função constante, nomeadamente, que todos os objetos duma função deste tipo têm a mesma imagem.

Após o esclarecimento das dúvidas projetei um exemplo de uma função de proporcionalidade direta em diferentes representações e, nas interações com os alunos, foi possível destacar a constante de proporcionalidade nas diferentes representações de uma função, em particular, que a imagem de um é igual à constante de proporcionalidade – ainda que considere que este último aspeto precisou ser mais enfatizado em abordagens posteriores. Seguidamente, e como planeado, ditei uma definição de função de proporcionalidade direta bem como algumas observações que os alunos registaram no caderno diário. Este segmento durou cerca de 20 minutos, mais do dobro do previsto, mas penso que foi importante esta discussão em grande grupo, bem como o registo que os alunos fizeram no caderno.

Ao aperceber-me que, nos minutos finais da aula, não seria possível cumprir o planeado, optei por pedir aos alunos que iniciassem a ficha de trabalho, que ficaria como proposta para trabalho de casa e seria discutida na aula seguinte. Para tal, sugeri uma escala para a representação gráfica solicitada na questão 1.4 da ficha de trabalho (Anexo 2.2).

Globalmente, considero que esta aula foi extremamente importante para clarificar algumas noções, pois penso que os alunos consolidaram aprendizagens relativamente a tópicos estudados no 7.º ano, fundamentais para realizarem aprendizagens no estudo desta nova unidade de ensino. Nesta aula, tornou-se mais evidente a apropriação, por parte dos alunos, de designações e conceitos como o de função, objeto, imagem, domínio e contradomínio, por exemplo. Isto, para além do estudo de uma função linear, em particular, de uma função de proporcionalidade direta.

Nesta aula, apesar de se tratar apenas de um bloco de 45 minutos e de os segmentos da aula se prolongarem para além do desejável, penso que consegui imprimir um ritmo mais dinâmico e que foi possível tirar um bom partido das (poucas) intervenções dos alunos. De notar, ainda, que nesta aula optei por ditar uma síntese, ao invés de projetá-la para os alunos copiarem para o caderno diário, o que, na minha opinião, resultou bastante melhor pois permitiu rentabilizar melhor o tempo em sala de aula.

3.6.3. Aula 3: 7 de abril de 2016 (90 minutos)

Tendo em conta o atraso ocorrido na aula anterior, a planificação inicial para esta aula precisou ser ajustada e, assim sendo, esta aula (Anexo 3.3) iniciou-se com a discussão oral da ficha de trabalho n.º 2 (Anexo 2.2), começada na aula anterior. Aqui, apesar das minhas chamadas de atenção muitos alunos ainda fizeram a correção das questões na ficha de trabalho.

Nesta primeira parte da aula, os alunos estavam muito pouco participativos, como tal, apoiei-me nos dois ou três alunos que participavam para desenrolar o segmento. Aqui reconheço que faltou ritmo e dinâmica a esta discussão, e considero que deveria ter gerido este segmento com mais pulso uma vez que detalhei demasiado a explicação e ainda assim os alunos não interagiam. Mesmo assim, neste segmento, deveria ter dado maior destaque ao domínio e contradomínio desta função específica, atendendo ao contexto do problema, e frisado, de forma mais marcada, a relação de proporcionalidade direta. Portanto, penso que esta discussão foi um pouco exaustiva e demorada e, juntamente com o gasto de tempo no início da aula, optei por não fazer a síntese planeada, dando início ao trabalho autónomo dos alunos na realização da primeira questão da ficha de trabalho n.º 3 (Anexo 2.3).

Ao tomar essa opção, tentei gerir o resto da aula com o objetivo de que os alunos tivessem um papel mais ativo. Portanto, suprimi o breve segmento de sistematização que estava planificado e dei início à introdução da ficha de trabalho n.º 3. Para que os alunos começassem a trabalhar rapidamente optei por introduzir a primeira questão, lendo o seu enunciado e questionando se existiam dúvidas.

Durante o trabalho autónomo dos alunos nesta aula, pelas resoluções dos alunos que pude observar, percebi distintas estratégias, que contornavam o cálculo da constante de proporcionalidade com uma regra de três simples. O referido aspeto revelou que os alunos não estão à vontade como o raciocínio proporcional, pelo que as tarefas propostas nesta aula, com o intuito de consolidar a função de proporcionalidade direta revelaram ser um problema.

Uma vez que os alunos se mostraram empenhados na resolução da questão 1, da ficha de trabalho n.º 4, e, atendendo a que estes demoraram mais tempo que o previsto na resolução das primeiras alíneas, pelos factos anteriormente referidos e, como também já não restava muito tempo de aula, optei por prolongar por uns minutos o trabalho autónomo dos alunos. Apesar dos distintos ritmos de trabalho, poucos alunos avançaram para lá da questão 1.5. Deste modo, optei por dar por concluído este segmento da aula, com o objetivo de discutir em grande grupo as alíneas 1.1 e 1.4 da ficha de trabalho.

Na discussão destas alíneas, a primeira foi debatida oralmente, por se tratar apenas de uma questão de interpretação, e fui solicitando a participação dos alunos enquanto registava as suas respostas no quadro. Aqui, interpelei os alunos no sentido que fossem justificando as suas posições, no entanto, poderia ter sido enfatizado com maior antecedência o facto de se tratar de uma situação de proporcionalidade direta, já que a mesma só foi realçada quando os alunos indicaram a expressão algébrica. Destaco que, ao escreverem as expressões algébricas desta situação de proporcionalidade direta a grande maioria dos alunos atendeu às nomenclaturas utilizadas nesta questão, designando a variável independente por p. No entanto, foi notório que os alunos não associam a função $f(p)$ à imagem, na representação gráfica, ou seja, ao y. Ainda assim, saliento que os alunos demonstraram maior à vontade com algumas expressões, conceitos e nomenclaturas específicas do estudo deste tema e que, no meu entender, foi já o reflexo do que foi trabalhado nas duas aulas anteriores.

De um modo geral, na terceira aula deste conjunto, os alunos estiveram um pouco ausentes na primeira metade da aula e senti que não geri muito bem essa apatia, sentindo alguma insegurança por não perceber o melhor modo de lidar com a quase ausência de participação dos alunos. Assim, interpretei o silêncio dos alunos como se não estivessem a compreender a discussão, pelo que me demorei um pouco mais neste segmento. O meu cuidado na tentativa de que a resolução ficasse clara para os alunos traduziu-se numa falta de ritmo e dinâmica na primeira metade da aula. Considero que, de facto, tenho de contornar este tipo de situação e de imprimir maior ritmo e dinâmica à aula.

Nos últimos instantes da aula os alunos receberam uma tarefa de consolidação para realizaram como trabalho de casa e foram recolhidas as fichas de trabalho n.º 3, que voltariam a ser entregues na aula seguinte, para que os alunos continuassem o trabalho autónomo.

Quando dei por concluída a aula senti alguma frustração por os objetivos estipulados para esta aula não terem sido cumpridos na sua totalidade, em parte, por não ter imposto maior ritmo e dinâmica à primeira parte da aula. Reconheço também que senti algum receio pelo facto de os alunos poderem sentir-se inseguros por não conseguirem terminar a questão na sala de aula. Todavia, e como anteriormente frisei, penso que nesta aula foi visível que os alunos já não revelaram tantas dificuldades relativamente aos conceitos basilares do tópico "Funções" do 7.º ano, quer na comunicação oral como na escrita – facto que contrabalança o anterior, pela positiva.

3.6.4. Aula 4: 11 de abril de 2016 (90 minutos)

Esta foi a primeira aula em que foi utilizado o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra como recurso à atividade matemática em sala de aula, o que exigiu uma reforçada preparação prévia. Neste dia, a aula decorreu na sala de informática mas, devido ao número insuficiente de computadores operacionais, levei para a sala, com o apoio da minha colega da prática de ensino supervisionada, alguns computadores portáteis para que os alunos pudessem trabalhar a pares, nos moldes habituais. Como estes recursos seriam imprescindíveis, antes do início da aula foi necessário ligar todos os computadores e, em cada um deles, colocar um ficheiro GeoGebra "em branco" para tentar garantir que os alunos não se dispersavam ao abrir um documento no *software*.

O plano que apresento para esta aula (Anexo 3.4) não foi o inicialmente previsto, uma vez que, nas duas aulas anteriores não consegui cumprir os objetivos planeados e existiu a necessidade de fazer um ajuste na planificação da unidade. Assim, para que fosse trabalhada a representação de uma função afim como translação da representação gráfica de uma função linear, segundo um vetor, foi necessário acrescentar um segmento inicial de trabalho autónomo, dedicado à conclusão da resolução e discussão da primeira questão da ficha de trabalho n.º 3 (Anexo 2.3).

Como, na aula anterior, recolhi as produções escritas, foi possível basear-me nas resoluções que alguns alunos já tinham feito para preparar a discussão das últimas alíneas da primeira questão desta ficha de trabalho. Deste modo, apesar de não ter todas a resoluções dos alunos, pude selecionar algumas, como por exemplo, para a apresentação de resultados da alínea 1.5, garantindo que alguns alunos iriam referir "são funções de proporcionalidade direta" para que fosse possível destacar a sua expressão geral e a constante de proporcionalidade. Realço que neste segmento foi evidente que os alunos destacaram essencialmente características relativas à expressão algébrica das funções, sendo o momento de discussão crucial para destacar as características gráficas das duas funções. Já para a discussão da alínea 1.7, e com base nas produções dos alunos que recolhi, tentei solicitar a um aluno que não tem por hábito participar que o fizesse, sabendo que daria uma resposta correta, na tentativa de que este ganhasse maior confiança para intervenções posteriores. Para além desta preparação, enquanto os alunos trabalhavam autonomamente, observei resoluções de outros alunos que foram surgindo, aos quais também pedi que interviessem no momento de discussão.

Reconheço que deveria ter gerido este segmento em grande grupo de outro modo, uma vez que, para não alongar demasiado a discussão desta questão optei por fazer uma discussão sobretudo oral e os alunos acabaram por não fazer o registo das respostas. Assim, no momento, ao querer avançar, tive pouca sensibilidade para este aspeto e considero que teria sido mais eficaz, por exemplo, se ditasse uma resposta para que os alunos registassem no caderno pois, realmente, os mesmos ainda não mostram autonomia suficiente neste campo. Desta forma, terei de cuidar mais os registos finais após as discussões em grande grupo, já que tanto é fundamental uma discussão rica como é importante que os alunos façam registos escritos para que possam ser mais autónomos no estudo individual.

Uma das dificuldades reveladas pelos alunos na resolução da questão 1.8 foi precisamente a identificação de dois pontos pertencentes à função para que pudessem representá-la graficamente. Para além deste aspeto, os alunos revelam dificuldade em associar um ponto como um par ordenado, sendo que, muitas vezes, para identificar o ponto, referem-se como "o ponto 2", por exemplo, dando apenas ênfase ao valor onde a reta interseta o eixo.

No final da discussão da questão 1, aquando da introdução da representação gráfica de uma função linear como translação do gráfico de uma função afim, estou convicta que o GeoGebra representou um poderoso recurso para clarificar esta translação, sendo um momento em que os alunos prestaram bastante atenção e apresentaram algumas reações de espanto e surpresa pela clareza e eficiência do recurso que eu estava a utilizar. Neste que foi o primeiro contacto, ainda que visual, dos alunos com o GeoGebra, pude observar pelas suas reações que, sempre que possível, nos momentos de discussão este recurso será uma mais-valia para as suas aprendizagens já que se revelam mais atentos e mais participativos o que, consequentemente, enriquece os segmentos em grande grupo.

Da primeira parte da aula, destaco que é necessário trabalhar um pouco mais com os alunos a marcação de pontos no referencial, dada a expressão algébrica de uma função, bem como a função constante, já que estes revelaram alguma resistência ao indicar exemplos e características de uma função constante – ainda que na discussão tivessem recorrido a argumentos como "não são paralelas ao eixo das abcissas" para evidenciar que as funções f e g não eram constantes.

Para a segunda parte da aula, por ser a primeira vez que os alunos utilizariam computador e o GeoGebra na aula de Matemática, estes receberam o enunciado da tarefa bem como um guião de utilização do *software* (3.4). Um dos alunos leu a questão para a turma e para garantir que todos abriam o ficheiro corretamente senti a necessidade de fazer uma demonstração com o meu computador que estava projetado.

Na minha opinião, os alunos aderiram bem à tarefa (2.4) e começaram logo a "explorar" o ambiente do GeoGebra, no entanto, nas questões mais dirigidas da tarefa mostraram alguma resistência em recorrer ao guião do GeoGebra, preferindo questionar "Como é que se representam pontos?". Para além do que referi, foi notório que os alunos, apesar de interessados, mostram pouca familiaridade com a interface deste recurso tecnológico e do teclado do computador, possivelmente porque estão mais habituados a usar outro tipo de ferramentas digitais.

Como os alunos demoraram mais tempo que o previsto a obter as representações, e uma vez que a destreza com o *software* seria importante para a resolução de outras tarefas em sala de aula, optei por prolongar este segmento de trabalho autónomo até ao final da aula pois não seria produtivo começar a discussão a poucos minutos do fim da aula.

Durante o trabalho com o GeoGebra foi necessário reagrupar alguns alunos, uma vez que, durante a aula, ocorreram falhas técnicas com alguns computadores. Assim, optei por formar um grupo de três alunos que habitualmente não trabalham em conjunto mas que, na minha opinião, acabou por resultar bem. Um dos meus receios iniciais foi que não houvesse adesão à tarefa e que os alunos se dispersassem por estar a utilizar computador, em contrapartida, penso que apesar de não estarem familiarizados com o recurso, estiveram empenhados na realização da tarefa.

Apesar de o último segmento de aula previsto (resolução em grande grupo e sistematização) não ter sido concretizado, faço um balanço muito positivo da aula já que considero que, quanto à minha atuação, fui mais dinâmica e penso que imprimi um melhor ritmo à aula. Por exemplo, penso que foi positivo optar por deixar os alunos trabalharem autonomamente no segmento final da aula, ao invés do que tinha planeado, para que estes pudessem concluir a tarefa e ter um pouco mais de contacto com o recurso.

Para além dos aspetos mencionados, considero que esta aula me permitiu ganhar maior confiança uma vez que foi exigente quanto à preparação e à utilização dos recursos e, mesmo assim, na minha opinião, os objetivos foram atingidos (para a parte do plano que foi cumprido), tendo sido simultaneamente para os alunos uma aula diferente e com maior dinâmica onde, na minha perspetiva, puderam tirar partido de outros recursos na aula de Matemática, reforçando uma atitude positiva face à disciplina e ao seu trabalho em sala de aula.

3.6.5. Aula 5: 13 de abril de 2016 (45 minutos)

Como na aula anterior não existiu tempo para discutir em grande grupo a tarefa "Funções no GeoGebra", esta 5.ª aula (Anexo 3.5) iniciou-se precisamente com este segmento, sendo que fui solicitando a participação dos alunos. Um aspeto que me permitiu preparar de modo mais fundamentado este momento de discussão foi a análise das produções escritas dos alunos, bem como a consulta de alguns ficheiros do GeoGebra. Assim, ao iniciar esta discussão pude tirar partido das respostas que me pareceram ser mais ricas para este momento em grande grupo, por exemplo, pedindo a intervenção dos pares de alunos que escreveram respostas menos comuns e fui escrevendo essas expressões no ficheiro GeoGebra do meu computador que estava projetado para toda a turma.

Na discussão da primeira questão saliento o modo como os alunos empregaram corretamente as designações de função constante, linear e afim e evocaram características algébricas e gráficas, sobretudo, das funções lineares e afins. Já para a discussão da questão 1.2 levei um ficheiro GeoGebra preparado para evidenciar que, por dois pontos distintos passa uma única reta e, considero que aqui o apoio deste *software* foi essencial para otimizar o tempo de discussão, nomeadamente para verificar a equação da reta e para confrontar as respostas de diferentes pares de alunos. Este foi também o momento oportuno para recordar a equação reduzida de uma reta e clarificar as noções de declive e ordenada na origem já que, por exemplo, um dos alunos questionou “o declive é $-2x$ ou -2?”.

Mais do que a apresentação de resultados da questão 1.3, a discussão em torno destas alíneas foi um momento de sistematização dos conteúdos trabalhados já que, para além do que planeei, senti necessidade de sintetizar algumas noções. Por exemplo, fiz uma breve sistematização sobre a função constante que ditei e pedi que os alunos registassem no caderno diário.

Ainda neste segmento, uma aluna comentou, em jeito de dúvida, que no caso da função constante $a(x)$=8 “não há declive porque não tem o x, teria de ser $8x$”. Aqui foi o momento em que me senti mais insegura mas optei por me dirigir à aluna na tentativa de clarificar este aspeto pois se, por um lado, seria o momento oportuno para envolver a turma e trabalhar este tema, por outro, poderia ser um pouco ambicioso para alguns alunos já que ainda não tinham ferramentas para calcular analiticamente o declive e poderia gerar alguma confusão.

Contrariamente às aulas anteriores, os alunos mostraram-se bastante mais participativos e muito atentos, sobretudo quando recorri ao GeoGebra para obter a representação das funções, clarificar e confrontar respostas, apurando o seu sentido crítico. Particularmente nesta aula, em que o segmento de discussão se centrou muito no GeoGebra, senti que foi imprescindível a minha familiaridade com o recurso ao manusear com alguma rapidez os comandos, até mesmo para efeitos de dinâmica da aula.

Assim, a discussão da tarefa correu bem mas acabou por se prolongar um pouco mais e os alunos estavam muito agitados pelo entusiasmo na discussão, pelo que, restavam poucos minutos para o final da aula quando iniciaram o trabalho autónomo. Decorrido algum tempo, mais de metade da turma estava com dúvidas na questão 1 do manual. Esta questão acabou por ser um problema para a maioria da turma já que teriam de filtrar a informação do enunciado e mobilizar uma série de conhecimentos para alcançar cada uma das expressões algébricas solicitadas. Assim, contrariamente ao planeado, optei por fazer uma explicação alargada à turma e, privilegiando o questionamento, em interação com os alunos foram alcançadas as expressões algébricas pretendidas. Solicitei, em seguida, que realizassem as restantes questões como trabalho de casa.

Deste modo, e apesar do segmento final da aula, considero que globalmente a planificação foi cumprida e os objetivos alcançados já que a discussão em grande grupo foi, na minha opinião, um momento muito rico onde os alunos foram confrontados com respostas distintas das suas, uma corretas e outras nem tanto, o que proporcionou clarificar alguns conteúdos e sistematizar outros. Novamente, o GeoGebra foi um importante recurso no momento de discussão, permitindo apresentar diversas representações de forma rápida e eficiente.

Quanto ao meu papel nesta aula, para além de gerir e mediar as interações dos alunos, tentei garantir que, com os exemplos por eles apresentados e com os esclarecimentos que solicitavam, se pudesse proporcionar uma sistematização suficientemente completa e clara para todos.

3.6.6. Aula 6: 14 de abril de 2016 (90 minutos)

Tal como planeado, esta aula (Anexo 3.6) iniciou-se com a correção do trabalho de casa, seguindo-se a introdução ao cálculo analítico do declive e a resolução de alguns exercícios de aplicação. Depois, estava planeada a resolução de um problema, que poderia ser feita com recurso ao GeoGebra. Deste modo, a aula decorreu na sala de informática da escola e, antes do início da mesma, tive de fazer uma maior preparação prévia, à semelhança da 4.ª aula, ao levar para a sala alguns computadores portáteis, garantir que todos os 15 computadores estavam operacionais e que tinham um ficheiro GeoGebra em "branco".

No entanto, como a noção de declive e o seu cálculo analítico requerem um investimento maior dos alunos e uma aprendizagem com compreensão, por ser um conceito sempre presente no tema Funções a partir do 8.º ano de escolaridade, foi necessário despender um pouco mais de tempo, quer para a introdução ao cálculo analítico do declive, quer para o segmento em que os alunos realizaram questões de aplicação. Portanto, não foi possível concretizar o problema da tarefa final, o que fez com que não fossem utilizados computadores nesta aula, apesar de toda a preparação prévia.

Nestas duas primeiras aulas em que foi antecipada a utilização de tecnologia como recurso dos alunos na aula de Matemática, refleti sobre os constrangimentos que um professor enfrenta para preparar as suas aulas e ultrapassar determinadas barreiras físicas, ao nível dos recursos e da sua funcionalidade. Para além destes aspetos, condicionada ao horário da aula de Matemática, a realização desta aula na sala de informática apenas foi possível porque uma professora se disponibilizou a fazer uma permuta. De outro modo, seria impossível tencionar realizar esta atividade com os alunos, sendo que se levasse computadores portáteis para a sala habitual, os alunos teriam de trabalhar em grupos de cinco alunos – moldes de trabalho bastante distintos do habitual.

Nesta aula, os alunos foram especialmente pouco participativos o que também contribuiu de forma menos positiva para a dinâmica da aula. Face ao silêncio dos alunos, tentava interagir com a turma sem grande sucesso pois, acabei por me apoiar um pouco numa aluna e no que esta expressava para conduzir este segmento da aula. Destaco esta situação relatada como a experiência menos conseguida da minha parte ao longo das aulas lecionadas, uma vez que tive alguma dificuldade em gerir o silêncio dos alunos e simultaneamente avançar com a aula, pois interpretei que o silêncio dos alunos representava dúvidas.

Nomeadamente, no esclarecimento de dúvidas do trabalho de casa, apesar de dirigir o questionamento ao dialogar com a turma e pedir a intervenção dos alunos, ainda que oralmente, penso que o ganho para as aprendizagens dos alunos e para a dinâmica deste segmento poderia ser aumentado se solicitasse a um dos alunos que fosse ao quadro, deixando que a turma interpelasse o colega.

Ainda no segmento inicial da aula, destaco que a grande maioria dos alunos já utiliza sem hesitação as designações de objeto e imagem, bem como a determinação de um objeto ou imagem, conhecida a expressão algébrica da função, aspeto particularmente crítico no início da unidade de ensino.

No entanto, um aspeto particularmente problemático prendeu-se com a interpretação da palavra "interseção", dificuldade que inicialmente não tinha previsto. Na discussão da questão 3 do manual, quando questionei os alunos acerca da interseção da reta com os eixos coordenados, a turma, em geral demonstrou dificuldade em compreender que a interseção representa o ponto onde a reta cruza o eixo, pelo que senti necessidade de me alongar neste segmento. Posteriormente, penso que poderia ter apresentado no quadro um esquema com um referencial ortogonal e monométrico, com uma reta que o intersetasse pois a visualização da "interseção" poderia ser mais clara para os alunos. Assim, este é um aspeto a ter em conta na aula seguinte, apresentando exemplos pictóricos e recorrendo a sinónimos como “cruzar” ou “cortar o eixo” para trabalhar com compreensão este conceito.

Relativamente ao segmento dedicado ao cálculo analítico do declive, acabou por ser mais centrado em mim, sempre em interação com os alunos. Considero que este momento foi bem conseguido, sobretudo a transição do cálculo do declive de uma reta que passa na origem do referencial para uma paralela a esta, uma vez que os alunos se aperceberam espontaneamente que não era suficiente recorrermos à estratégia de dividir a ordenada pela abcissa de um ponto da reta. Assim, parece-me que foi claro para os alunos a necessidade de conhecer outra estratégia para calcular o declive.

Se considero que o aspeto anterior foi bem conseguido, reconheço que para os alunos foi bastante problemático aceitar a expressão geral do cálculo analítico do declive, sobretudo, por causa das nomenclaturas dos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Estas questões foram esclarecidas com exemplos e uma breve explicação alargada a toda a turma.

Durante o trabalho autónomo dos alunos, no primeiro contacto com o cálculo analítico do declive, apercebi-me que estes estavam a demorar-se um pouco mais do que tinha previsto mas optei por despender mais tempo de aula neste segmento porque considerei essencial que trabalhassem a sua agilização no cálculo analítico do declive. No momento de discussão e, tal como previsto, solicitei, na questão três, a um aluno que apresentasse oralmente a sua resposta (distinta da apresentada pelo colega no quadro) com o objetivo de evidenciar que não importa a ordem dos pontos no cálculo do declive, desde que esta se mantenha no numerador e no denominador.

Nesta aula, a planificação não foi cumprida pois o tempo esgotou-se antes de ser possível iniciar a tarefa “Um passeio de bicicletas” (Anexo 2.5) e a respetiva discussão. Ainda assim, como esta aula envolveu muitas noções distintas e os alunos contactaram pela primeira vez com a expressão do cálculo do declive, penso que foi importante e positivo investir mais tempo no trabalho autónomo dos alunos.

3.6.7. Aula 7: 18 de abril de 2016 (90 minutos)

Tal como referido, na aula anterior não existiu tempo para resolver a tarefa “Um passeio de bicicletas” (Anexo 2.5), pelo que, a planificação para esta aula (Anexo 3.7) precisou ser ajustada e a mesma começou, precisamente, por um segmento dedicado ao trabalho autónomo dos alunos nesta tarefa. Uma vez que ficaria como opção dos pares de alunos a utilização, ou não, do GeoGebra para a resolução deste problema, esta aula realizou-se na sala de informática da escola e, à semelhança das aulas em que foi necessário este recurso, levei computadores portáteis para a sala de modo a que cada par pudesse ficar com um computador.

Ainda que tivessem referido que tiveram dúvidas no trabalho de casa, os alunos começaram entusiasmados na realização da tarefa, mas muitos afirmaram não saber como começar. Foi interessante verificar que nem todos os alunos recorreram ao GeoGebra para realizar esta questão, ainda que a primeira opção da grande maioria tivesse sido escrever a função m no recurso.

Logo do primeiro impacto com a tarefa pude aperceber-me da dificuldade dos alunos em encontrar uma estratégia que lhes permitisse comparar as duas funções e, para além disso, alguns alunos interpretaram a situação da empresa P como traduzida por uma função linear. Durante o trabalho autónomo dos alunos, foram evidentes os diferentes ritmos de trabalho dos pares e que alguns alunos se alongavam mais nas justificações que outros.

Do meu ponto de vista, o segmento dedicado à discussão desta tarefa foi um verdadeiro momento de partilha, uma vez que a generalidade da turma mostrou estar envolvida e participativa, colaborando na discussão das ideias e dos resultados obtidos.

Tal como planeado, e para garantir que os alunos teriam o tempo necessário para resolver a tarefa anterior, optei por fazer o esclarecimento de dúvidas do trabalho de casa após a discussão da tarefa “Funções no GeoGebra”. Os alunos levantaram algumas dúvidas, mais especificamente na representação gráfica de uma função, dada a sua expressão algébrica, o que me levou a prolongar um pouco mais o segmento dedicado a esta finalidade. Ao longo deste esclarecimento, tentei ter em atenção o conceito “interseção”, apoiando-me em exemplos concretos e nas palavras “cruzar” e “cortar” para referir-me à interseção. Aqui, apercebi-me que os alunos se apropriaram dos conceitos e propriedades mas revelam dificuldades em mobilizá-los e encadeá-los. Recorrendo a um dos exercícios do trabalho de casa, foi ainda reforçado o cálculo analítico do declive e discutido em grande grupo a relação entre o declive positivo ou negativo e a inclinação da reta correspondente.

Como o tempo de aula estava a esgotar-se, optei por contornar um pouco a planificação e pedi aos alunos que resolvessem apenas as questões 4 e 12 do manual. Rapidamente se chegou ao último instante da aula e pedi aos alunos que concluíssem as questões em casa pois seriam discutidas na aula seguinte. Ainda assim, ao longo da realização da questão 12, um número considerável de alunos revelou dificuldades em calcular analiticamente o declive de uma reta.

Esta aula decorreu com maior fluidez já que não era a primeira vez que os alunos tinham aula de Matemática naquela sala e também já estavam mais familiarizados com o recurso. No entanto, na primeira metade da aula, precisei chamar diversas vezes a atenção dos alunos já que estavam muito agitados. Após outras tentativas de diminuir o barulho em sala de aula, num dos momentos, face a esta exaltação dos alunos, precisei adotar um registo um pouco mais elevado para chamar os alunos à atenção. Ao reconhecer que em aulas anteriores tive dificuldade em impor-me perante algumas situações de comportamento menos adequados em sala de aula, considero que consegui trabalhar este aspeto e, pelo menos nesta aula, geri esses momentos de forma mais eficiente. Após este momento, os alunos adotaram a postura habitual em sala de aula e tudo decorreu normalmente em termos comportamentais.

Nesta aula senti-me mais confiante no meu papel enquanto professora, apesar de, para além de gerir a aula, os trinta alunos, as suas interações e ainda os recursos tecnológicos, senti-me realizada com as opções que tomei ao longo da aula, nomeadamente, ao descolar-me um pouco do plano elaborado e por ter insistido com os alunos para que copiassem os registos para o caderno – o que me deixou bastante motivada para as aulas seguintes. Para concluir, os tempos que estipulei na planificação não foram rigorosamente seguidos mas penso que os objetivos para esta aula foram alcançados.

3.6.8. Aula 8: 20 de abril de 2016 (45 minutos)

Da aula anterior ficou pendente a discussão de algumas questões em grande grupo, no entanto, como era necessário existir um momento mais formal em que se estudasse a reta vertical optei por não começar a aula com a discussão dessas questões. Assim, e de acordo com a planificação que elaborei (Anexo 3.8), achei mais adequado que a aula se iniciasse por um segmento dedicado à reta vertical, sendo que depois esta noção poderia ser integrada na discussão das questões que foram para trabalho de casa. Deste modo, a aula iniciou-se com a discussão de alguns exemplos para a qual levei um ficheiro GeoGebra preparado para que os alunos pudessem visualizar diferentes retas verticais, com rigor, e que me permitiu dar mais ênfase à reta vertical $x = 0$, já que se sobrepõe ao eixo das ordenadas e a versatilidade do GeoGebra permitiu dar maior destaque a este aspeto.

Já na discussão das questões do manual que foram iniciadas na aula anterior, apesar de a grande maioria da turma afirmar que não existiam dúvidas, uma aluna questionou "Como se calcula o declive da reta r?". Neste momento, solicitei a ajuda de outros alunos com o intuito de esclarecer a colega. Os alunos afirmaram que seria necessário identificar dois pontos e, aqui, aproveitei a ocasião para clarificar que no caso da reta r, por ser o gráfico de uma função linear, seria suficiente considerar apenas um ponto da reta para determinar o declive.

Seguidamente, e tal como planeado, calculámos em grande grupo o declive da reta horizontal que surgiu no exercício 12 do manual, para destacar que as retas horizontais têm declive zero.

Como, desde o início da aula, os alunos já tinham trabalhado a reta vertical e a reta horizontal, considerei importante, naquele momento, lançar-lhes um desafio e apresentar um exemplo. Desenhei no quadro um referencial ortogonal e monométrico com uma reta vertical ($x = 5$) e outra horizontal ($y = -3$) e pedi aos alunos que me indicassem oralmente as equações das retas. Esta minha opção, que não tinha sido planeada, emergiu porque pensei que os alunos pudessem evidenciar dificuldades pois, até ao contacto com a reta vertical, a equação de uma reta era sempre do tipo "$y =$ " e considerei que seria o momento oportuno para esclarecer eventuais dúvidas. Felizmente, a turma reagiu bem a este exemplo, revelando aprendizagem com significado.

Ao longo da aula, pelas interações com os alunos e pelas dúvidas que colocaram, apercebi-me que revelam alguma dificuldade em identificar graficamente a ordenada na origem. Assim, nas próximas aulas a identificação gráfica e algébrica da ordenada na origem merece uma maior atenção com o objetivo de clarificar os alunos.

No segmento de trabalho autónomo final gerou-se alguma confusão porque pedi aos alunos que realizassem as questões do manual por uma ordem distinta da numeração que era apresentada no livro e muitos alunos não se aperceberam. Consequentemente, quando quis dar por finalizado o momento de trabalho autónomo alguns pares de alunos ainda não tinham pensado na primeira questão da sequência que pedi que fizessem. Assim, deixei os alunos prolongarem um pouco mais o trabalho autónomo e apenas foi possível resolver e discutir em grande grupo uma das três questões que tinha indicado, mas estou convicta que foi importante ter despendido mais uns minutos para garantir que todos os alunos pensavam nas questões.

Dei por concluída esta aula bastante motivada para a aula seguinte, uma vez que, os grandes objetivos planeados foram alcançados e a planificação foi cumprida.

3.6.9. Aula 9: 21 de abril de 2016 (90 minutos)

Esta aula (Anexo 3.9) tinha como principal objetivo consolidar os conhecimentos dos alunos relativamente ao tema "Gráficos de Funções Afins", dedicando algum cuidado na resolução de problemas.

Na apresentação da ficha de trabalho (Anexo 2.6), como planeado, pedi a um aluno que lesse para a turma o enunciado da primeira tarefa e foi possível perceber que os alunos identificaram corretamente o paralelogramo em causa. Como os alunos não levantaram questões, dei início ao trabalho autónomo da turma. No entanto, a maioria dos pares solicitou apoio pois não sabia como iniciar a resolução. Posteriormente, apercebi-me que no momento da apresentação da ficha poderia ter frisado mais as retas suporte dos lados do paralelogramo. Não o quis fazer para não diminuir o desafio do problema, mas talvez pudesse ter quebrado o impasse inicial na realização desta questão.

Tendo em conta esta demora, o trabalho autónomo nesta 1ª questão prolongou-se mais que o previsto mas penso que foi importante para que todos os alunos tivessem a experiência de resolução deste problema. Nesta fase foi interessante contactar com as estratégias dos alunos e os argumentos que utilizaram para adotar dados para o problema, nomeadamente, ao selecionarem um valor para a ordenada dos pontos A e B, por considerarem que eram dados em falta. Outro aspeto que destaco é que, alguns alunos, justificaram a sua resposta recorrendo a argumentos como o paralelismo, ou calcularam apenas o declive da reta AD.

O carácter problemático desta questão foi acentuado porque os alunos ainda não tinham resolvido autonomamente questões em que tivessem que determinar a ordenada na origem de uma reta, recorrendo a um outro ponto que pertencesse à reta. Assim, o objetivo central do desafio deste problema que residiu na articulação do tema Geometria com o tema Gráficos de Funções Afins foi dificultado pelo cálculo da ordenada na origem. Considerando este aspeto, penso que a sequência destas tarefas teria de ser repensada numa utilização posterior, caso o objetivo com a aplicação deste problema não fosse determinar a ordenada na origem recorrendo a um outro ponto da reta. Assim, considero que este aspeto da planificação não foi tão bem conseguido já que provocou "ruído" ao intuito principal na resolução deste problema. Pelos factos descritos, acabei por fazer uma explicação alargada à turma e pedi aos alunos que registassem o exemplo que apresentei nos seus cadernos diários.

No trabalho autónomo e na discussão da segunda questão da ficha de trabalho dos alunos penso que estes mobilizaram os conhecimentos que têm vindo a ser trabalhados em sala de aula já que como resposta a esta questão, na globalidade, apresentaram respostas válidas e bastante plausíveis.

Quanto à questão 3 surgiram algumas estratégias inesperadas que foram reveladoras da necessidade, de alguns alunos, de ter uma noção mais geométrica da situação, e sendo necessário determinar a ordenada na origem de uma reta recorrendo a um outro ponto da reta, esta questão precisou de maior dedicação no momento de discussão. Devido a esta dificuldade, penso que será conveniente retomar um exemplo deste género.

Relativamente à quarta questão da ficha, durante o trabalho autónomo, foi interessante observar que surgiu uma estratégia não antecipada pois a grande dificuldade dos alunos surgiu na interpretação do problema. Assim, foi curioso que os maiores constrangimentos na resolução desta questão estiveram relacionados com a significação do "eixo de reflexão" e não com a mobilização dos conhecimentos referentes ao tópico em estudo, Gráficos de Funções Afins.

Com o final da aula a aproximar-se preferi que os alunos dedicassem o resto do tempo na resolução da última questão da ficha de trabalho, deixando a discussão das resoluções para o início da aula seguinte.

Em geral, penso que esta aula decorreu de forma bastante positiva e os alunos estiveram sempre interessados e empenhados, na tentativa de superar as suas dúvidas. No entanto, revelaram alguma resistência em fazer os registos no caderno nos segmentos em grande grupo, pelo que precisei insistir um pouco nesse aspeto com a turma.

Nesta aula de 21 de abril, ainda que não tenha seguido sempre a planificação elaborada, penso que os objetivos gerais foram alcançados.

3.6.10. Aula 10: 27 de abril de 2016 (45 minutos)

A aula de dia 27 de abril (Anexo 3.10) teve algumas características mais peculiares uma vez que os alunos teriam ficha de avaliação de Matemática no dia seguinte. Assim, após iniciar a aula com uma breve discussão da última questão da Ficha de Trabalho n.º 4 (2.6), o restante tempo em sala de aula foi exclusivamente dedicado ao esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação.

Ainda na discussão da questão 4, um dos alunos referiu que o eixo de reflexão era "uma reta" e a turma não levantou questões. No entanto, no cálculo analítico do declive os alunos revelaram alguma confusão pelo que senti necessidade de fazer uma explicação à turma dando outro exemplo, já que teriam ficha de avaliação no dia seguinte. Também neste momento de discussão foi oportuno retomar o cálculo da ordenada na origem conhecendo outro ponto da reta.

Como os alunos revelaram ter bastantes dúvidas foi necessário que as três professoras em sala de aula circulassem para poder clarificar questões mais individuais e, as dificuldades mais generalizadas foram discutidas no quadro para toda a turma, sendo que assumi um papel mais central.

Os alunos evidenciaram dúvidas, principalmente, nos conteúdos abordados ao longo do ano letivo, pelo que foi necessário resolver, com o apoio da participação oral dos alunos, alguns exercícios no quadro. Foi ainda levantada uma dúvida relativamente ao paralelismo de retas, que expliquei no quadro, com a colaboração das intervenções dos alunos. Durante estes esclarecimentos foram notórias as dificuldades da grande maioria dos alunos da turma na determinação de expressões algébricas.

De acordo com o que referi, penso que a planificação desta aula foi cumprida e os objetivos para esta aula, alcançados.

3.6.11: Aula 11: 28 de abril de 2016 (90 minutos)

Na última aula (Anexo 3.11), que lecionei, os alunos realizaram uma ficha de avaliação sumativa (Anexo 4), de acordo com o calendário definido com a professora titular da turma. Para além dos tópicos relativos à unidade de ensino "Gráficos de Funções Afins", esta ficha de avaliação englobou outros conteúdos anteriormente trabalhados pelos alunos, como os temas "Dízimas finitas e infinitas periódicas" e "Equações do 2.º grau".

Capítulo 4

Métodos e Procedimentos de Análise de Dados

O quarto capítulo deste trabalho é dedicado à apresentação dos métodos e procedimentos de recolha e análise de dados que adotei neste estudo de cariz investigativo, desenvolvido com alunos do 8.º ano de escolaridade, na lecionação da subunidade “Gráficos de Funções Afins”. Ao longo deste estudo foi essencial ter presente a problemática em estudo bem como as questões orientadoras do mesmo – já indicadas no Capítulo 1. Pelas suas características, e por decorrer paralelamente à prática de ensino supervisionada, foi crucial cuidar das opções metodológicas, da seleção de participantes, das questões éticas, dos instrumentos de recolha de dados, bem como da análise dos mesmos – tópicos que serão abordados e explicitados nas próximas páginas.

4.1. Opções Metodológicas

O principal objeto do meu estudo é compreender como alunos do 8.º ano de escolaridade resolvem problemas com a função afim, em dois contextos, incluindo ou não o recurso à tecnologia. Considerando as peculiaridades deste estudo é manifesta a utilização de uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa, com vista a promover um melhor entendimento dos significados atribuídos pelos alunos nas suas opções, representações e estratégias – em particular na resolução de problemas com a função afim, como expõe Coutinho (2013). Também Stake (1995) elabora acerca deste tipo de metodologia, dando destaque ao seu cunho interpretativo e ao modo como se pretende compreender as “complexas inter-relações” (p. 37) existentes entre os fenómenos ocorridos e os dados recolhidos – tal como no estudo que desenvolvo.

Assim, baseando o estudo num contexto de descoberta e descrição, assumi o papel de professora e de investigadora, o que, ao desempenhar o meu papel de professora exigiu um envolvimento pessoal na investigação. Estes aspetos, tal como descritos, fazem ressaltar os fatores que Bogdan e Biklen (1994) consideram como característicos desta abordagem investigativa.

Um primeiro aspeto relaciona-se com o facto de o ambiente natural dos participantes do estudo ser a fonte direta dos dados e, como investigadora, fui a principal via de recolha dos mesmos. Os participantes deste estudo são os alunos da turma no 8.º ano, com os quais realizei a prática de ensino supervisionada. Durante todo este processo, tentei minimizar os fatores externos ao ambiente natural dos alunos, ainda que tivesse inserido novos recursos em sala de aula, penso que a essência da atmosfera foi mantida – em grande parte pela relação de confiança que foi sendo construída com os alunos, desde o início do ano letivo. Paralelamente ao meu papel principal em sala de aula, o de professora, desenvolvi este estudo, pelo que a minha observação ao longo de todo este processo foi um dos elementos primordiais no desenrolar de todo o estudo e que contribuiu para a interpretação e análise dos dados.

Além disso, os dados recolhidos têm uma natureza descritiva. A informação que recolhi foram o núcleo dos "dados para ilustrar e substanciar a apresentação" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48), sob a forma de palavras, imagens ou representações, que analisei do modo mais fidedigno possível, ao recorrer aos registos escritos dos alunos ou à transcrição de diálogos. Esta abordagem minuciosa é, pois, característica de um estudo qualitativo e teve o intuito de tentar alcançar "uma compreensão mais esclarecedora do . . . objeto de estudo" (p. 49); ainda que, de modo bastante menos presente, tenha realizado uma breve análise de dados quantitativos para complementar este estudo.

Outro aspeto característico desta abordagem é o facto de o maior interesse recair sobre o processo e estratégias dos participantes e não tanto nos resultados ou produtos. As formas como se desenrolam as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das questões propostas, as opções tomadas e o caminho percorrido até alcançarem certas representações foram, assim, o foco do meu estudo.

Simultaneamente, os dados foram analisados de forma indutiva, já que não formularei hipóteses prévias nem estabeleci categorias prévias. Tal como indicado, ao centrar-me no processo do raciocínio dos alunos, e não exclusivamente no produto é, já de si, indicador de como fui desenvolvendo o estudo, ao partir de um aglomerado de dados, agrupando-os de acordo com determinadas tendências.

Por fim, o entendimento e compreensão dos significados atribuídos pelos alunos são centrais para o estudo. Com este intuito, foram realizadas entrevistas a alguns alunos de modo a interpretar o que cada um dos participantes experimenta (Bogdan & Biklen, 1994) e que conceitos mobiliza na resolução do problema.

4.2. Participantes no estudo

Assumidas as características qualitativas do presente estudo, é natural revelar que a escolha dos participantes assume especial importância, recaindo sobre os 30 alunos da turma de 8.º ano. Esta minha opção prende-se com o objetivo do meu estudo, no qual pretendo identificar as estratégias e representações adotadas pelos alunos, bem como os conceitos matemáticos a que recorrem. Caso contrário, poderia estar a reduzir demasiado o espectro de análise das estratégias, representações e conhecimentos matemáticos mobilizados pelos alunos.

Além disso, de modo a aprofundar o meu estudo, e atendendo à dimensão da turma, decidi ainda selecionar dois pares de alunos, com o objetivo de particularizar as realidades e de tentar identificar de modo mais fundamentado as representações e estratégias a que recorrem ao longo do trabalho que desenvolvem, na resolução de problemas com a função afim. Portanto, para esta seleção, optei por considerar cinco critérios, para selecionar os pares de alunos: *i)* apresentarem interesse e disponibilidade em participar no estudo; *ii)* fossem assíduos às aulas de Matemática nos dois primeiros períodos letivos; *iii)* em que fosse natural o trabalho colaborativo; *iv)* revelarm ser empenhados e mostrassem boa capacidade de expressão e transmissão de ideias com o objetivo de minimizar os constrangimentos na comunicação; e *v)* com alguma heterogeneidade ao nível dos saberes mas, que revelem boa capacidade de comunicação (entre o par), de forma a garantir a recolha de dados.

Apresentarei, agora, os dois pares de alunos selecionados:

- O Ivan e a Soraia, ambos de 13 anos, são o par mais heterogéneo e que apenas começaram a estar sentados lado a lado no início do segundo período escolar. A Soraia é uma aluna muito empenhada e trabalhadora mas que revela algumas dificuldades na disciplina de Matemática. Ao longo do ano letivo obteve sempre a classificação de nível 3, apesar de ser evidente o seu progresso. O Ivan é um dos alunos mais perspicazes da turma mas que nem sempre tira rendimento das suas capacidades. Este aluno é bastante participativo e nos três períodos obteve o nível 4.
- A Piedade e a Alberta têm 13 anos e são das mais atentas e trabalhadoras alunas da turma. Quanto ao seu percurso na disciplina de Matemática durante o 8.º ano, a Piedade teve o registo de nível 3 no primeiro período e, nos restantes, nível 4. Já a Alberta, desde o início do ano letivo obteve

classificação nível 4. É ainda de salientar que estas alunas esclarecem-se mutuamente durante as atividades, no entanto, por vezes, são pouco autónomas, mas participativas.

De modo a respeitar as questões de ordem ética, em primeira instância, enderecei um pedido de autorização à Direção do Agrupamento (Anexo 5.1) que a turma frequenta, e garanti que o deferimento fosse comunicado tanto à Diretora de Turma (Anexo 5.2), como à Coordenadora do Departamento de Matemática da escola (Anexo 5.3). Posteriormente, solicitei autorizações aos Encarregados de Educação dos alunos desta turma (Anexo 5.4), clarificando os objetivos do estudo e informando da garantia de confidencialidade dos dados. Obtive todos os pareceres positivos, pelo que não houve qualquer condicionante neste sentido.

Assim, obtive um consentimento informado de todos os alunos participantes neste estudo que, aderiram, voluntariamente, ao mesmo. Reforço ainda que, ao longo do presente trabalho, a identidade dos participantes será salvaguardada pela utilização de nomes fictícios. Desta forma, penso acautelar as questões éticas implicadas na realização deste estudo (Bogdan & Biklen, 1994).

4.3. Instrumentos de recolha de dados

Para a concretização deste estudo são imprescindíveis elementos pertinentes para análise, que vão ao encontro do objetivo de investigação, o que se coaduna com uma também criteriosa seleção dos instrumentos de recolha de dados. Para realizar este trabalho recorri aos seguintes instrumentos de recolha de dados: observação das aulas, gravação áudio e/ou vídeo e através do programa *AutoScreenRecorder*, recolha documental e realização de uma entrevista.

4.3.1. Observação das aulas

A observação participante é o método central de recolha de dados de um estudo com este cunho, pois é o contacto direto com os intervenientes no estudo, em contexto de sala de aula, que deixa transparecer os dados mais realistas e fidedignos.

Enquanto professora e investigadora nem sempre foi fácil efetuar registos escritos no decorrer das aulas. Para colmatar esta dificuldade, recorri quer ao registo posterior de episódios ou aspetos que considerei serem pertinentes (tanto para a minha interpretação dos dados, como para refletir sobre a minha prática) para complementar os dados anotados no contexto sala de aula. Além disso apoiei-me nos registos efetuados pela minha colega da prática de ensino supervisionada, a Inês. Assim, recorri ao diário de bordo para anotação das observações das aulas, contemplando para além da parte descritiva, uma componente reflexiva sobre todo este processo (Bogdan & Biklen, 1994).

A gravação áudio/vídeo foi também usada para complementar o registo de observação já que possibilitou ficar com o registo das interações momentâneas dos pares de alunos, bem como dos segmentos de discussão em grande grupo. Este facto será fundamental como complemento às produções escritas dos alunos, já que estes, por vezes, verbalizam ideias que não são explícitas na escrita. Este registo permite revisitar diálogos que ocorrem em simultâneo e escapam ao investigador no cumprimento do seu papel de professor.

Destaco também que, ao longo da lecionação deste conjunto de aulas, os dois pares de alunos que têm um papel mais marcante neste estudo tinham na sua secretária um gravador com o objetivo de, com maior rigor, captar as suas interações. Além disso, sempre que os pares recorreram ao GeoGebra, usei o programa *AutoScreenRecorder,* que me permitiu ter acesso a uma gravação de tipo filme de todos os passos que os alunos realizaram na janela do *software* Geogebra, durante a resolução do problema.

4.3.2. Recolha documental

Ao longo da lecionação da unidade Gráficos de Funções Afins recolhi todos os documentos que os alunos produziram em aula, e alguns dos que realizaram em casa, para que pudesse digitalizar e devolver os documentos aos alunos, ficando com o registo.

O primeiro documento a ser recolhido foi a ficha diagnóstico, que os alunos realizaram no final do 2.º período letivo, e que foi um importante componente de apoio à planificação e elaboração dos materiais da unidade de ensino.

Em moldes ligeiramente distintos funcionou a restante recolha documental, para que pudesse ter acesso às resoluções dos alunos. Sendo complicado fazer um acompanhamento continuado, aluno a aluno, durante a aula, a recolha das produções escritas dos alunos, realizadas em aula, permitiu-me ter acesso à maior parte das estratégias e representações por estes utilizados – na resolução de problemas com a função afim – e realizar parte substancial do estudo. Com o intuito de recolher estes documentos pedi aos alunos que resolvessem as tarefas propostas a lápis na própria ficha ou numa folha quadriculada que facultei, rasurando, caso se enganassem. Pedi-lhes ainda que, durante ou após a discussão dos resultados, fizessem a correção destas tarefas no caderno diário.

Reconheço que esta estratégia que adotei teve alguns constrangimentos, sobretudo nas primeiras aulas. Os alunos revelaram alguma resistência em não apagar as suas resoluções, quando se enganavam, apesar dos meus permanentes alertas. Uma alternativa seria pedir para que fizessem os registos a caneta, no entanto, como não era o procedimento habitual, poderiam ficar inibidos de escrever – e optei por não o fazer. Sendo um risco calculado, os alunos não se coibiram de escrever, no entanto, alguns dados foram “contaminados” pois, por vezes, os alunos apagaram registos ou escreveram a correção na própria folha. Ainda assim, esta recolha documental, complementada com os outros elementos recolhidos traduziram-se em elementos chave para este trabalho, e constituíram-se fulcrais para a identificação de estratégias e conhecimentos mobilizados.

Dos documentos que recolhi fazem ainda parte os ficheiros GeoGebra produzidos pelos alunos. Deste modo, e de forma a garantir a recolha destas representações, para além de pedir aos alunos que gravassem os ficheiros, solicitei, sempre que se justificou, que transcrevessem para a folha de respostas as representações obtidas através do *software* e as suas resoluções. Também nesta fase foi fundamental o apoio da minha colega Inês que, incansavelmente, me ajudou neste processo, na tentativa de garantir a gravação e recolha dos ficheiros do GeoGebra dos alunos.

Embora a problemática do meu trabalho diga respeito à resolução de problemas, optei por recolher todas as produções efetuadas pelos alunos em sala de aula, com o intuito de não influenciar os registos nas tarefas de resolução de problemas. Adicionalmente, o facto de ficar na posse de todos estes registos, permitiu-me ter também um “fio condutor” da progressão de cada aluno, ao longo da unidade de ensino, que me possibilita realizar uma análise mais fundamentada.

4.3.3. Entrevista

As entrevistas realizadas no âmbito deste estudo foram utilizadas, como referem Bogdan e Biklen (1994), “para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam" (p. 134). Neste caso em particular, a realização de entrevistas do tipo clínico (Hunting, 1997) ficou reservada para os dois pares de alunos selecionados, que mencionei anteriormente.

Essencialmente, com a realização desta entrevista clínica a dois pares de alunos, pretendi, primeiramente, garantir que teria resoluções suficientemente viáveis para serem objeto de estudo e, em segundo lugar, para compreender estratégias, e processos de resolução de forma mais clara e aprofundada.

As entrevistas aos pares de alunos ocorreram após a minha intervenção letiva, no dia 11 de maio, durante o horário da aula de Matemática, dadas as condicionantes referentes a encontrar um horário compatível com os alunos. Nessa aula de 45 minutos, a restante turma realizou a correção da ficha de avaliação sumativa que, nesse mesmo dia, foi facultada aos alunos que realizaram a entrevista – e que foram alertados para possibilidade de esclarecerem eventuais dúvidas.

Antes mesmo da realização destas entrevistas, que acabaram por durar cerca de 30 minutos, foi essencial questionar os alunos, novamente, se teriam disponibilidade e interesse em participar, bem como explicar-lhes que a resolução da tarefa, e a conversa sobre essa mesma resolução não seriam objeto de qualquer tipo de avaliação – tal como sugerem os aspetos característicos da abordagem aos alunos neste tipo de entrevista (Lahikainen, Kirmanen & Taimalu, 2003).

Do meu ponto de vista, os alunos não se mostraram inibidos e colaboraram ao longo da entrevista, mostrando-se entusiasmados. É ainda de salientar que foi necessário ir com os alunos para uma outra sala e, devido aos constrangimentos temporais inerentes a este tipo de atividade extracurricular, apoiei-me na minha colega de estágio que realizou a entrevista, em simultâneo, ao outro par de alunos.

Para esta entrevista elaborei uma tarefa com dois problemas (Anexo 6.1), atendendo às questões do meu estudo. Tanto eu como a minha colega de estágio acompanhámos de perto o processo de resolução dos problemas e as interações entre os pares de alunos. Desta feita, fomos pedindo que os alunos explicitassem oralmente, ou por escrito, os seus raciocínios e estratégias.

Dado que o objetivo central era aceder às estratégias e raciocínios dos alunos, tal como aos conhecimentos matemáticos que mobilizariam, esta entrevista assumiu características semiestruturadas, uma vez que a amplitude de conteúdos a abranger e tópicos a esmiuçar seria muito vasto e teria de ser concordante com as resoluções que os alunos apresentassem. Esta flexibilidade necessária não invalidou a elaboração de um guião da entrevista (Anexo 6.2) que resultou de uma reflexão sobre os dados necessários obter para ir ao encontro da problemática do estudo, bem como, no antecipar de algumas estratégias e dificuldades, constando ainda algumas orientações para tentar que os alunos fossem o mais específicos possível. Assim, este "guião" continha uma série de questões que me poderiam apoiar na entrevista mas que poderiam evoluir para outro tipo de questões de acordo com as respostas e o desempenho dos alunos (Hunting, 1997).

Destaco que, para os contornos das questões do estudo, disponibilizei aos pares de alunos computadores com o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, para que o utilizassem como recurso, se assim o desejassem.

Assim, este trabalho de cariz investigativo, que assenta no contexto empírico da descoberta e da interpretação, vale-se dos instrumentos de recolha de dados que mencionei para poder apurar considerações para as questões que inicialmente formulei. Durante a lecionação das aulas, tentei focar-me no meu objetivo de estudo, nas minhas aprendizagens mas, e sobretudo, nas aprendizagens dos alunos.

4.4. Processo de análise de dados

Para a análise de dados, etapa essencial na procura de respostas para as questões de investigação inicialmente formuladas, atendi aos dados recolhidos, sendo o elemento principal desta análise as produções escritas dos alunos. A análise destes documentos foi, muitas vezes, complementada com os registos áudio, vídeos e, com os registos do diário de bordo.

Simultaneamente à lecionação desta unidade, arquivei todas as digitalizações e gravações. Nesta fase posterior, primeiramente, organizei as produções escritas dos alunos por problemas e tentei fazer observações globais referentes à sua "evolução" ao longo da resolução dos problemas propostos. Depois, e dadas as características do estudo, foi necessário agrupar estes problemas consoante fosse ou não necessária a utilização do *software.*

Ao longo desta análise, tentei identificar padrões nas estratégias utilizadas pelos alunos, o tipo de representações a que o aluno recorreu ou alcançou, bem como aos conceitos matemáticos utilizados. Especialmente, destaco o confronto das estratégias utilizadas pelos alunos nos problemas que resolveram com ou sem o recurso ao GeoGebra. Em particular, no que respeita às estratégias utilizadas pelos alunos, dei especial ênfase à análise das fases de resolução de problemas descritas por Pólya (1957) – já explicitadas no Capítulo 2, e às estratégias heurísticas presentes nas resoluções dos alunos, na resolução de problemas com a função afim.

Capítulo 5

Análise de Dados

Neste capítulo apresento uma análise dos dados recolhidos ao longo da prática letiva supervisionada, com o objetivo de dar resposta às questões do estudo que formulei inicialmente. Analiso a resolução dos problemas pelos alunos de acordo com as fases enunciadas por Pólya (1957) e incluo a análise das estratégias heurísticas a que os alunos recorreram neste processo. Além disso, nesta análise procuro atender aos conhecimentos matemáticos mobilizado pelos alunos na resolução de cinco problemas, que são apresentados pela ordem em que lhes foram propostos. De sublinhar ainda que, como referi anteriormente (Capítulo 4), com o objetivo de ter um acesso mais particular aos dados, em alguns momentos desta análise especifico aspetos referentes aos dois pares de alunos selecionados: Ivan e Soraia e Alberta e Piedade.

Mesmo antes de avançar para a análise de dados penso que é importante referir que, desde o início da lecionação da unidade de ensino, pude perceber a insegurança dos alunos na abordagem aos problemas propostos – por não estarem muito familiarizados com a resolução de problemas na aula de Matemática. Mas, é também de salientar que, em geral, os alunos mostraram sentir-se gradualmente mais confiantes na resolução dos problemas apresentados.

5.1. Tarefa “Um Passeio de Bicicletas”

O enunciado apresentado na Figura 6 diz respeito à tarefa “Um Passeio de Bicicletas” para a qual os alunos tiveram à sua disponibilidade computadores com o *software* GeoGebra, caso quisessem tirar partido do recurso para resolver os problemas. Na resolução desta tarefa os alunos trabalharam a pares mas fizeram os registos individualmente.

Ao propor esta tarefa tive como objetivo que os alunos interpretassem funções afins em representações distintas, relacionando-as num determinado contexto.

1. Um grupo de amigos combinou fazer um passeio de bicicletas. Como nem todos os elementos do grupo tinham bicicletas, foram informar-se do valor a pagar pelo aluguer de uma bicicleta em duas empresas.

- Na empresa M, o preço a pagar (em euros) em função do tempo (em horas) do aluguer da bicicleta é dado pela função $m(x) = 6x + 1$, e inclui 1 euro do aluguer obrigatório de um capacete.
- Na empresa P, observaram alguns valores que os clientes tinham pago e que incluíam 4 euros do aluguer obrigatório de um capacete:

Número de horas do aluguer	3	4	7
Custo do aluguer (em euros)	16	20	32

1.1. O grupo de amigos quer passear de bicicleta durante uma hora.
Na tua opinião, em que empresa será mais vantajoso fazer o aluguer das bicicletas para uma hora? Explica a tua resposta.

1.2. Um dos amigos afirmou: "É sempre mais vantajoso alugar as bicicletas na empresa M porque pagam menos pelo uso do capacete".
Concordas com esta afirmação? Justifica a tua resposta.

1.3. Em qual das empresas deve o grupo de amigos alugar a bicicleta? Explica a tua resposta.

Figura 6 – Enunciado da tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

Inicialmente este problema tinha sido pensando apenas com a última alínea mas ponderou-se que teria um cariz demasiado aberto, considerando o contexto desta turma e o tipo de tarefas com que estão mais familiarizados. Assim, o problema está subdividido em três problemas, o que naturalmente diminui o grau de abertura de cada um deles.

De forma a simplificar a análise das resoluções dos alunos, em seguida comentarei as alíneas deste problema separadamente e sintetizarei os aspetos mais importantes no final. Nesta análise tento focar-me nas fases de resolução de problemas bem como nas estratégias e representações adotadas pelos alunos e nos conhecimentos que estes mobilizam. Embora os alunos tenham trabalhado a pares, uma vez que fizeram registos individuais, analisarei os dados individualmente, apesar de ser inevitável observar alguns aspetos dos alunos enquanto pares.

5.1.1 Alínea 1.1

Na primeira alínea o cariz problemático reside, essencialmente, no modo como as funções são apresentadas (Figura 6), já que o objetivo é perceber em que empresa é mais vantajoso alugar bicicletas. Enquanto para a empresa M a função do custo do aluguer está expressa algebricamente, para a empresa P esse custo é apresentado sob a forma de tabela.

Compreensão do problema

Quando a tarefa foi proposta, a leitura do enunciado foi feita para toda a turma por um dos alunos e não foram levantadas dúvidas significativas. Diria que a grande maioria dos alunos interpretou corretamente o enunciado e conseguiu compreender os dados fornecidos, referentes às duas empresas. Na generalidade, a turma avançou rapidamente para a primeira questão do problema.

Elaboração de um plano

Os alunos lidaram naturalmente com as duas funções, em separado, no entanto as primeiras dificuldades surgiram quando foram tentar confrontar os dados do custo do aluguer em ambas as empresas. Esta dificuldade era de certo modo esperada porque os dados do custo do aluguer, referentes a cada uma das empresas, foram, propositadamente, indicados em linguagens distintas (algébrica e tabular) de modo a que os alunos precisassem traduzir estas representações para confrontar os dados.

Como os alunos perceberam a necessidade de "comparar" os valores de aluguer praticados foi possível observar algum impasse ao tentarem trabalhar com os dados da empresa P. Na tentativa de ultrapassar essa dificuldade, os alunos leram por diversas vezes o enunciado e, por exemplo o Ivan, de forma retórica, disse "Como é que se faz a função da empresa P?", à semelhança de outros alunos – o que remete para o desenvolvimento do plano, já que parecem perceber que com outra representação da função (referente ao custo na empresa P) será possível dar uma resposta.

A Alberta, ao afirmar que "Então... a função mais pequena é aquela que [é mais vantajosa]" expressa também o estabelecimento de um plano ao evidenciar que precisa determinar qual a função "mais pequena", ou seja, a função que representa a empresa com menor custo de aluguer.

Execução do plano

Na primeira alínea desta tarefa, dos 30 alunos da turma, dez apresentaram apenas a correção que foi feita no quadro em grande grupo, nomeadamente o par Ivan e Soraia – o que restringe a análise dos dados destes alunos às gravações vídeo/áudio e do *Auto Screen Recorder*. Da perceção que tenho do trabalho em sala de aula, todos os alunos deram resposta a esta questão. Dos 20 alunos que entregaram o seu registo escrito, apenas três alunos apresentaram uma resposta incorreta, isto é, afirmaram que para uma hora de aluguer seria mais vantajosa a empresa P.

Quanto aos recursos utilizados, quatro pares de alunos não recorreram ao GeoGebra (dos quais o par Alberta e Piedade) e onze pares de alunos, em algum momento, tiraram partido deste recurso (entre estes a Soraia e o Ivan). Importa ainda referir que, dos pares que recorreram ao *software*, dois pares de alunos responderam a esta primeira questão apenas com base no GeoGebra.

Na grande maioria, os alunos começaram por observar características da função m, o que, quanto a mim, se justifica por já conhecerem a sua expressão algébrica e não revelarem dificuldades em interpretá-la, e em calcular o valor de aluguer para uma hora, como exemplificam as Figuras 7 e 8.

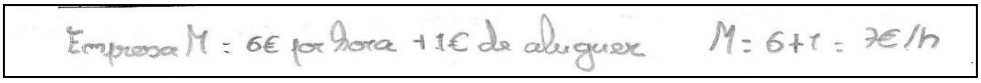


Figura 7 – Cálculo do custo do aluguer de uma hora, na empresa M, realizado pelo Tomás

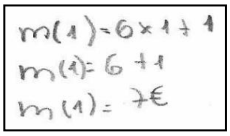


Figura 8 – Cálculo do custo do aluguer de uma hora, na empresa M, realizado pela Cátia

Como é possível observar nas figuras, à semelhança do que fizeram mais alunos, estes reconhecem que o x representa o número de horas do aluguer e que um é o custo fixo do capacete, na empresa M. Neste caso, os alunos recorreram ao *cálculo* e à interpretação dos dados e ao *mobilizar dos seus conhecimentos* como estratégias para perceber o custo do aluguer na empresa M.

Ao trabalharem com a função m, os alunos que utilizaram o GeoGebra, recorreram a este *software* quase de imediato, inserindo a expressão algébrica da função para obter uma representação gráfica. Alguns alunos não fizeram cálculos, obtendo o custo do aluguer de uma hora na empresa M apenas por observação do gráfico, tirando partido das potencialidades do GeoGebra – utilizando assim a estratégia da *representação*.

Depois de interpretados os dados para a empresa M, os alunos começaram a trabalhar nos dados da empresa P – que estavam sob a forma de tabela. É interessante notar que apenas dois pares de alunos associaram os valores da tabela a pares ordenados, contrariamente ao que esperava. Os alunos que o fizeram (Figura 9), após marcarem dois pontos (neste caso A e B), traçaram a reta que os continha e obtiveram a equação dessa reta.

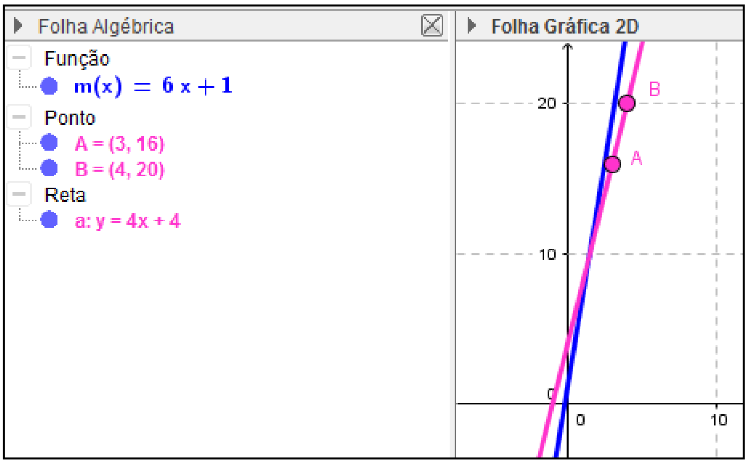


Figura 9 – *Output* de uma representação gráfica do custo do aluguer na empresa P, realizado pelo par Isabel e Rafael

Os alunos Isabel e Rafael são um dos dois pares que nesta primeira alínea resolveu o problema graficamente, exclusivamente através do GeoGebra. Assim, a *representação* foi a estratégia heurística adotada por estes alunos para resolver a questão.

De notar são os conhecimentos mobilizados pelos alunos nesta situação já que associaram o número de horas do aluguer com a variável independente e o custo deste aluguer à variável dependente. Para além disto, realço como o par evidenciou associar a equação de uma reta à expressão algébrica de uma função.

A maioria dos restantes alunos, interpretou a função do custo associada à empresa P como uma função de proporcionalidade direta (ver Figura 10) – nomeadamente o par Piedade e Alberta, ainda que nem todos o tivessem registado. Todos os alunos ao confrontarem as suas ideias com os colegas da turma, através de cálculos, ou através de breves esclarecimentos por parte das professoras, abandonaram essa convicção inicial.

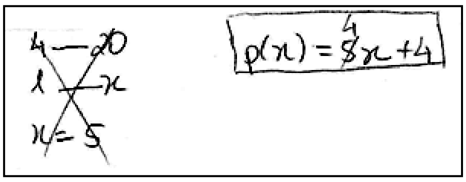


Figura 10 – Procedimento para escrever a expressão algébrica da função associada ao custo do aluguer na empresa P, realizado pela Alberta

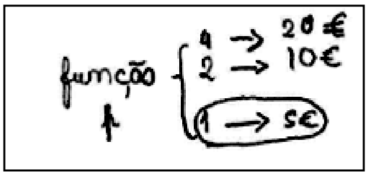


Figura 11 – Esquema para escrever a expressão algébrica da função associada ao custo do aluguer na empresa P, realizado pela Ana

Na Figura 10 observa-se que o objetivo da Alberta foi alcançar a expressão algébrica da função, já na Figura 11 verifica-se que a Ana pretendia de forma mais objetiva obter o valor do custo do aluguer. Ambas estão incorretas dado que as alunas não consideraram o custo fixo associado ao capacete. É ainda evidente que a Ana utilizou um *esquema* como estratégia de resolução do problema, para apoiar o seu raciocínio proporcional de cálculo sucessivo de metades.

Gostaria ainda de destacar que a primeira abordagem do par Ivan e Soraia à tabela foi dividir o 16 por três, ou seja, o par partiu de princípio que existia uma relação de proporcionalidade direta entre o custo e o número de horas de aluguer na empresa P. Assim, parece que estes mobilizaram os seus conhecimentos ao determinarem a suposta constante de proporcionalidade – o que apenas está implícito nos seus registos mas é nítido no diálogo entre os dois alunos:

> **Ivan:** Como é que se faz a função [associada ao custo] da empresa P? (pausa) Quanto é que é 16 a dividir por três? É seis!?... Não…
> **Soraia:** Sim…não…

Quanto a mim, esta transcrição aponta para a tendência dos alunos em assumir uma função que é representada sob a forma de tabela, como uma função de proporcionalidade direta. Ora, quando os alunos atenderam com mais cuidado à taxa fixa do capacete perceberam que o custo do aluguer já incluía esse valor, ainda que o Ivan tivesse feito uma breve explicação à Soraia:

> **Ivan:** A isto [16] temos que fazer menos quatro, certo? Então aqui fica 12 e 12 a dividir por três é quatro! Então fica $4x + 4$.
> (…)
> **Ivan:** Se eles quiserem uma hora o x é um, ou seja, é quatro vezes um, que é quatro, mais quatro [euros] do capacete.

O Ivan, ao referir que "temos que fazer menos quatro" e depois voltar a frisar "mais quatro [euros] do capacete", deixa transparecer a associação do custo fixo do capacete à constante, quatro, da expressão algébrica associada ao custo do aluguer na empresa P.

A Figura 12 permite observar o trajeto de uma outra aluna da turma, a Leonor, até escrever a expressão algébrica da função designada por p.

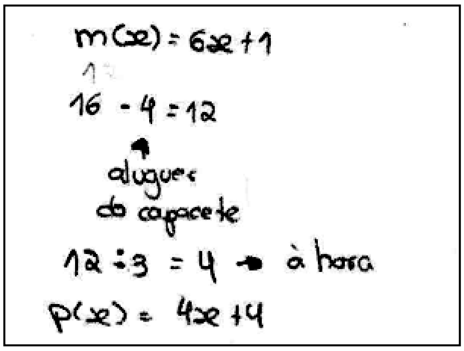
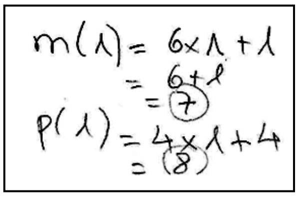


Figura 12 – Procedimento para escrever uma expressão algébrica da função $\boldsymbol{p}$, realizado pela Leonor

Esta resolução (Figura 12) exemplifica o modo como a maioria dos alunos procedeu, nomeadamente o par Ivan e Soraia: subtraiu o valor fixo do aluguer do capacete ao custo final e obteve o custo variável com o número de horas. De forma menos explícita, e ainda que nenhum aluno tivesse utilizado essa argumentação, é de salientar transformaram a função afim numa linear para poderem mobilizar os seus conhecimentos sobre proporcionalidade direta. Por exemplo, uma outra aluna, a Maria José determina a constante após retirar, aos valores da função custo, o custo fixo do capacete. A estratégia apresentada pela aluna evidencia que sentiu necessidade de validar o seu próprio raciocínio já que procedeu para os três valores do custo (16, 20 e 32), retirando-lhes os quatro euros associados ao custo do capacete e dividindo os valores obtidos pelos respetivos tempos de aluguer (três, quatro e sete), para escrever uma expressão algébrica da função associada ao custo do aluguer na empresa P.

De forma sumária, para responder a este primeiro problema da tarefa, poucos alunos recorreram a uma estratégia de representação e observação gráfica mas, na sua maioria, identificaram as expressões algébricas das duas funções e, ou as representaram graficamente, ou resolveram por processos exclusivamente analíticos, ou ainda, após resolverem por processos analíticos, introduziram as expressões no GeoGebra. Neste último caso, o *software* serviu como instrumento de confirmação e validação do trabalho efetuado.

Na Figura 13, apresento o registo de uma aluna que calcula por processos exclusivamente algébricos o custo do aluguer, para uma hora, em cada uma das empresas.

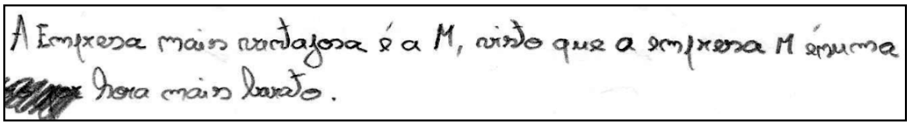


$m(1) = 6 \times 1 + 1$
$= 6 + 1$
$= 7$
$p(1) = 4 \times 1 + 4$
$= (8)$

Figura 13 – Cálculos para determinar o custo do aluguer por cada hora em cada uma das empresas, realizados pela Alberta

Tal como a Alberta, após determinarem a expressão da função $\boldsymbol{p}$, associada ao custo do aluguer na empresa P, a maioria dos alunos optou por calcular o custo do aluguer, nas duas empresas, ao substituir o tempo do aluguer por uma hora. Nesta fase, o cálculo do custo do aluguer traduziu-se no cálculo de duas expressões numéricas onde, globalmente, os alunos não apresentaram dificuldades.

Contrariamente a outras tarefas que os alunos tinham vindo a resolver, a grande maioria apresentou uma resposta a este problema, por exemplo, a apresentada na Figura 14, o que denota alguma evolução a este nível.



A Empresa mais vantajosa é a M, visto que a empresa M é numa hora mais barato.

Figura 14 – Resposta à alínea 1.1 do problema, realizada pelo Tomás

A resposta do Tomás evidencia o seu cuidado, à semelhança de outros colegas, em apresentar uma resposta. Sublinho que, neste caso, para que os alunos conseguissem responder à questão teriam de fazer uma comparação entre as observações registadas (através de esquemas, cálculos ou da observação gráfica) para cada uma das duas empresas.

Análise Retrospetiva

Na resolução desta alínea considero que a análise retrospetiva ocorreu essencialmente em dois importantes momentos. Primeiro, e extremamente crucial neste problema, quando os alunos identificaram erroneamente a função representada pela tabela (associada ao custo do aluguer na empresa P) como uma função de proporcionalidade direta. Em segundo lugar, quando, independentemente do tipo de estratégias que utilizaram para determinar o custo do aluguer associado a cada empresa, a grande maioria dos alunos apresentou uma resposta ao problema (não afirmo que todos os alunos deram resposta porque alguns dados foram adulterados pela correção feita no quadro, como referi) – o que, de facto, não é habitual acontecer. Na minha opinião, a presença de uma resposta relaciona-se com a necessidade que os alunos sentiram neste problema em comparar os dados referentes ao custo do aluguer nas duas empresas. Ou seja, do meu ponto de vista, o facto de a resolução da grande maioria dos alunos não terminar no passo ilustrado, por exemplo, pela Figura 13, indica, quanto a mim, que os alunos avaliaram o modo como procederam ao longo da resolução para conseguir apresentar uma resposta que é resultado da comparação entre o valor do aluguer em cada empresa.

Como complemento, resta-me acrescentar que o momento de discussão em grande grupo (que se realizou apenas no final da tarefa) mostrou ser importante, sobretudo, para que os alunos contactassem com estratégias distintas, já que nesse momento quase não existiam dúvidas.

5.1.2. Alínea 1.2

Com a análise das resoluções desta alínea o objetivo principal é perceber como os alunos interpretam estas duas funções custo e que argumento e estratégias utilizam.

Compreensão do problema

Os alunos mostraram compreender o enunciado do problema sem dificuldade e, penso que, por ser a segunda alínea da tarefa, já estavam mais familiarizados e focados no contexto.

Elaboração de um plano

Como esta é a segunda alínea do problema, a construção do plano engloba os cálculos e estratégias já utilizadas na alínea anterior. Em particular, os alunos recorreram à análise realizada na resolução da primeira alínea uma vez que, muitos já tinham obtido a expressão algébrica da função p e/ou uma representação gráfica das duas funções. Juntamente aos aspetos referidos, posso destacar que alguns alunos sublinharam certas palavras do enunciado, em particular "É sempre", o que indicia mais um passo na construção de um plano para a resolução do problema porque, na minha perspetiva, identificaram que o interesse não recaia apenas no custo do aluguer para uma hora (tal como na alínea 1.1), mas pretendiam comprovar se tal seria sempre assim.

Execução do plano

Do que me é possível confirmar, todos os alunos resolveram esta questão, embora se registem vertentes distintas ao nível das estratégias.

Para responder a este problema alguns alunos parecem ter-se baseado apenas no trabalho desenvolvido para a alínea anterior, nomeadamente, a Ana (Figura 15) que avançou logo para a resposta ao problema.

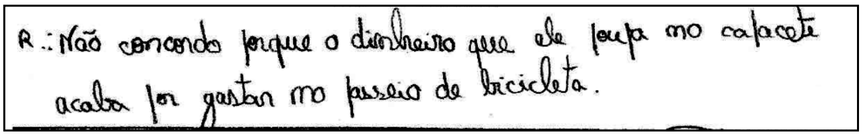

R.: Não concordo porque o dinheiro que ele poupa no capacete acaba por gastar no passeio de bicicleta.

Figura 15 – Resposta ao problema, realizada pela Ana

Pela afirmação presente na Figura 15 é possível conjeturar que a aluna, mesmo tendo recorrido ao GeoGebra na alínea anterior, apresentou uma justificação baseada na interpretação das expressões algébricas da função (que também determinou na alínea 1.1) pois percebe-se que reconhece que o custo do capacete é maior na empresa P e que essa mesma empresa apresenta um menor custo por hora. Conjeturo a referida argumentação porque, uma vez que, ao indicar que poupa dinheiro no capacete, a Ana remete para o facto de o aluguer do capacete ser mais barato na empresa M e, em contrapartida, ao referir que “acaba por gastar no passeio”, evidencia que por cada hora o aluguer é mais caro nesta mesma empresa. Outra justificação que complementa a dada pela Ana, é a do Felizberto, que refere que, “na [empresa] P a longo prazo gasta-se menos que na M”, no entanto, nenhum dos dois faz referências à representação gráfica, ou é mais pormenorizado relativamente ao que acontece ao custo do aluguer.

Surge ainda outra justificação, muito possivelmente, a partir da interpretação das representações gráficas fornecidas pelo GeoGebra, a da Clotilde (Figura 16), que não recorre a qualquer cálculo ou esquema, dando de imediato a resposta.

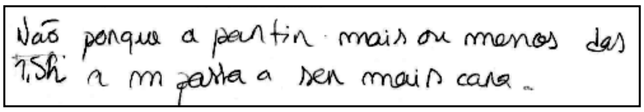
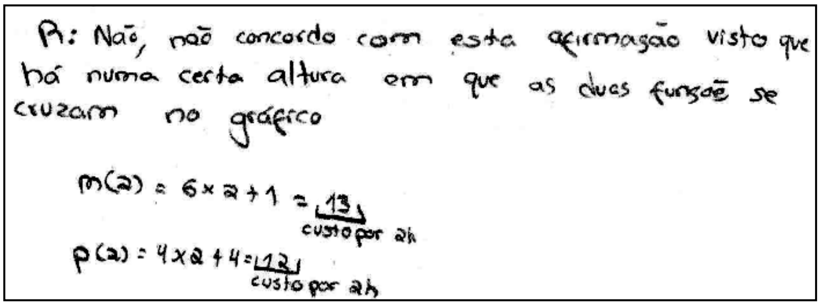

Não porque a partir mais ou menos das 7,5h a m passa a ser mais cara.

Figura 16 – Resposta ao problema, realizada pela Clotilde

Esta aluna foi concisa e não muito precisa na sua resposta, eventualmente, por não conseguir alcançar uma estratégia que lhe permitisse assegurar o valor. Ainda assim, a Clotilde revela mobilizar os seus conhecimentos ao nível da interpretação gráfica, ainda que não recorra a qualquer argumento relacionado com as características das retas, nomeadamente declive. Gostaria apenas de destacar que poderia ser expectável, mas muito pouco provável, que os alunos resolvessem um sistema com as duas equações por processos analíticos (pois já trabalharam esse tipo de resolução, ao contrário da resolução gráfica). No entanto, nas diversas resoluções, nenhum aluno encontra uma estratégia, com recurso ao GeoGebra, que lhe permita precisar a partir de que tempo de aluguer se torna mais vantajoso optar pela empresa P. Mas, por exemplo, a Leonor é um pouco mais explícita e dá um argumento extra, presente na Figura 17.


R: Não, não concordo com esta afirmasão visto que há numa certa altura em que as duas funsõe se cruzam no gráfico

$m(2) = 6 \times 2 + 1 = \underbrace{13}_{\text{custo por 2h}}$

$p(2) = 4 \times 2 + 4 = \underbrace{12}_{\text{custo por 2h}}$

Figura 17 – Resposta ao problema, realizada pela Leonor

Na resposta desta aluna é possível constatar dois cenários: ou que a aluna recorreu aos dados da alínea anterior e ao determinar o custo para duas horas de aluguer, comparou os valores, alcançando a conclusão ou tirou partido do GeoGebra (que também utilizou na alínea anterior) para perceber que as duas retas se cruzam e exemplificou que, para duas horas de aluguer, o custo era superior na empresa M, ao contrário do que se fosse o aluguer de uma hora. Deste modo, como a aluna referiu a interseção dos dois gráficos, interpreto que, muito possivelmente, a Leonor evidencia atender a uma inversão de relação entre os dois gráficos. Em todo o caso *introduzir valores auxiliares* ao assumir valores concretos, neste caso para o número de horas de aluguer (dois) foi uma estratégia utilizada pela aluna com o objetivo de tornar o problema mais acessível.

Pelo menos mais dois alunos, ao i*ntroduzir valores auxiliares no problema* (por exemplo, dois, três ou até mesmo 100), substituindo-os nas expressões do custo, observaram que, para esses valores o aluguer era mais vantajoso na empresa P. Então, encontrei conclusões como a que vem abaixo, da Cátia (Figura 18), e onde se observa que a aluna conclui que "a partir de uma hora é mais barato alugar na empresa P", embora na realidade essa vantagem se dê após uma hora e meia de aluguer.


R: Eu discordo porque a partir de 1 hora é mais barato alugar na empresa P.

Figura 18 – Resposta ao problema, realizada pela Cátia

Importa, por fim, fazer referência à resposta da Soraia (Figura 19) que foi a única que apresentou uma resposta incorreta.

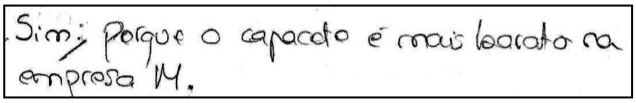

Sim; porque o capacete é mais barato na empresa M.

Figura 19 – Resposta ao problema, realizada pela Soraia

A aluna afirma que é sempre mais vantajoso alugar na empresa M porque o capacete é mais barato. Para mim esta resposta foi algo surpreendente pois a Soraia é uma aluna que, tendo as suas dificuldades, tem demonstrado estar mais à vontade nesta temática dos Gráficos de Funções Afins. Reconheço que esta resposta possa ser resultado das diferentes representações em que as funções são dadas e ao facto de a aluna ficar presa aos únicos valores que são concretos no enunciado – os valores da taxa fixa, desconsiderando o custo por cada hora de aluguer (que na empresa M é mais elevado).

Análise Retrospetiva

Na resolução desta alínea, penso que a fase da análise retrospetiva ocorreu ao longo do trabalho desenvolvido pelos alunos, já que estes tinham dados da alínea anterior que foram importantes para responder a esta questão. Portanto, parece-me evidente que os alunos que avaliaram os dados que já conheciam da resolução da 1.1, o que lhes permitiu clarificar que outra informação seria útil para responder à questão. Pelas suas resoluções foi possível observar que enquanto alguns alunos se conformam com o estudo feito na alínea anterior, outros exploraram um pouco mais e confrontaram com as conclusões à primeira questão.

A discussão dos resultados obtidos nesta alínea foi interessante já que alguns alunos estavam perfeitamente convictos que a empresa M seria sempre mais vantajosa e, até este momento de reflexão, era-lhes difícil conceber que a empresa P poderia ser mais vantajosa apesar do valor obrigatório pago pelo capacete nesta ser mais elevado.

Nesta discussão não foi explorada exaustivamente a resolução da questão, de forma a não influenciar desde logo a partilha de estratégias na alínea seguinte. Deste modo, foi primeiro destacada a estratégia de testar o custo para outro número de horas do aluguer que depois foi confrontado com análise da representação gráfica das duas funções. Para além deste aspeto, considerei importante sublinhar, à semelhança do que alguns alunos destacaram nas suas resoluções, que, alugar uma bicicleta na empresa P por duas horas, acaba por ser mais vantajoso que na empresa M – apesar de o custo fixo do aluguer do capacete ser maior na empresa P. Na minha opinião esta chamada de atenção resultou numa introspeção dos alunos dado que, este facto contraria, à partida, a tendência para considerar que o aluguer seria mais barato na empresa M, por exigir o pagamento de um menor valor pelo capacete.

5.1.3. Alínea 1.3

A minha intenção ao analisar as respostas a esta questão está relacionada com o tipo de argumentos a que os alunos poderiam recorrer, assim como aos conhecimentos que mobilizam, associados a uma maior ou menor completude na resposta – considerando o grau elevado de abertura deste problema.

Compreensão do problema

Como alguns alunos despenderam mais tempo na resolução das alíneas anteriores, nem todos chegaram a responder a esta alínea, no entanto, alguns dos que responderam levantaram questões relacionadas com a duração do aluguer. Deste modo, a interpretação desta questão não reuniu consenso já que, enquanto uns alunos assumiram que os amigos queriam fazer um aluguer “a longo prazo”, outros assumiram que a vantagem no aluguer estaria associada ao número de horas que os amigos pretendessem alugar as bicicletas (com base na resposta às alíneas anteriores).

Elaboração de um plano

O plano desenvolvido pelos alunos está estreitamente relacionado com a interpretação que cada um fez do enunciado. Pelo que, consoante esta interpretação, os alunos avançaram na resolução do problema. Por exemplo, para alguns alunos o plano passa por perceber qual das empresas é mais vantajosa para um número maior de horas de aluguer, enquanto para a maioria, o objetivo passa por perceber a mais vantajosa dependendo do número de horas do aluguer.

Execução do plano

No total existem, para além dos dados adulterados (cujos registos foram alterados pelos alunos de acordo com a resolução que foi apresentada em grande grupo), dez respostas ao problema (em 30), nas quais é possível observar que a maioria dos alunos optou por afirmar que a resposta dependeria do número de horas do aluguer. Esta conclusão dos alunos está relacionada com a sua resolução das alíneas anteriores já puderam aí identificar elementos importantes para responder a esta questão. Ainda assim, alguns alunos foram um pouco mais além nas suas justificações.

Começando com a resolução da Alberta, na Figura 20 é possível observar que, novamente, a aluna i*ntroduz valores auxiliares no problema* (um, dois e três), calculando o custo associado a cada número de horas de aluguer e, ao *identificar um padrão* nos custos obtidos, obtém uma resposta.

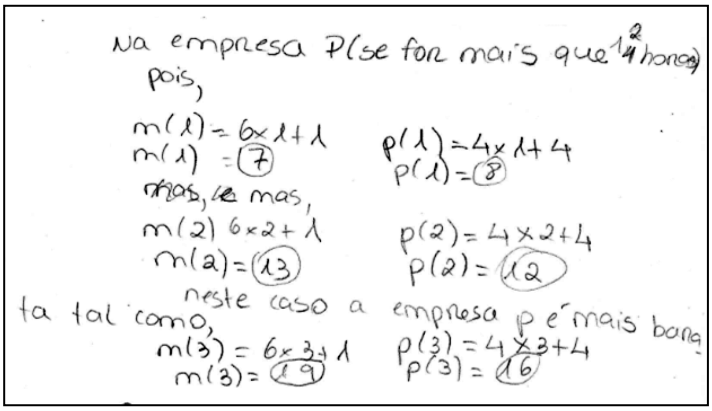

Na empresa P(se for mais que 1 2/4 horas)
pois,
m(1) = 6×1+1 p(1) = 4×1+4
m(1) = 7 p(1) = 8
mas, e mas,
m(2) 6×2+1 p(2) = 4×2+4
m(2) = 13 p(2) = 12
neste caso a empresa p é mais barata
ta tal como,
m(3) = 6×3+1 p(3) = 4×3+4
m(3) = 19 p(3) = 16

Figura 20 – Resposta à alínea 1.3, realizada pela Alberta

Dado que a aluna apenas considerou valores naturais, concluiu assim que o aluguer é mais vantajoso na empresa P se for mais que uma hora. No entanto, esta resposta não está completamente correta já que a aluna não atende a que, se andar até uma hora e meia, continua a ser mais barato alugar na empresa M. Uma resolução muito idêntica foi a apresentada pelo Tomás que, ao utilizar os mesmo valores que a Alberta, apenas organizou a informação de outro modo, sob a forma de esquema (prática muito habitual deste aluno).

Ainda a resolução da Alberta (Figura 20) ilustra como, de um modo generalizado, os alunos da turma evidenciam alguma facilidade na utilização da notação algébrica, mais especificamente no cálculo da imagem de uma função, dado o objeto. Esta tendência contraria, pela positiva, as dificuldades reveladas pelos alunos com este tipo de notação, no início do estudo deste tema.

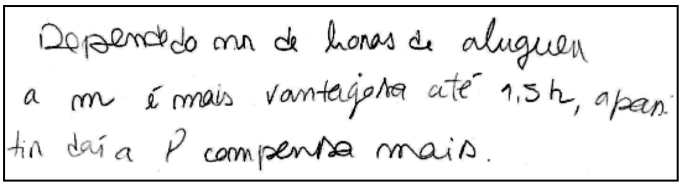

Dependendo nº de horas de aluguer
a m é mais vantajosa até 1,5h, a partir daí a P compensa mais.

Figura 21 – Resposta à alínea 1.3, realizada pela Clotilde

Já na Figura 21 observa-se que a aluna Clotilde é um pouco mais concreta na sua resposta ao afirmar que alugar na empresa P compensa se este aluguer for superior a uma hora e 30 minutos. A estratégia de Clotilde foi a interpretação das representações gráficas que obteve com auxílio ao GeoGebra, tendo sido mais concreta que na resposta à alínea 1.2 (ver Figura 16).

Penso que é fundamental registar que, embora alguns alunos reconheçam que as representações gráficas das duas funções se intersetam ou que observem com recurso ao GeoGebra esse mesmo ponto, nenhum aluno refere o ponto em que os valores do custo do aluguer são iguais. Considero este facto relevante pois, o facto de nenhum aluno explicitar o ponto onde as retas correspondentes aos gráficos das funções se cruzam, pode indiciar que estes ou não sabem interpretar as coordenadas desse ponto no contexto deste problema ou que não associam um ponto a uma representação gráfica em que duas retas se intersetam. Com recurso às gravações realizadas em sala de aula, apenas é percetível uma justificação como “aos dez cruza e depois a M passa a ser mais cara”, o que evidencia atenção a uma inversão no custo do aluguer nas duas empresas. No entanto, nesta argumentação, não é clara a associação dos dez euros (custo do aluguer) à sua duração (uma hora e meia).

Análise Retrospetiva

De uma forma global permito-me afirmar que, para dar uma resposta a esta questão, a grande maioria dos alunos que a resolveram realizaram análise retrospetiva, de acordo com as conclusões que obtiveram nas alíneas anteriores. Na minha perspetiva, o próprio encadeamento das questões e a informação que os alunos mobilizaram ao recorrer às alíneas anteriores reforça a ponderação que estes realizaram na tentativa de encontrar uma resposta para este problema. Deste modo, penso que o articular dos dados obtidos nas alíneas anteriores fomentou uma permanente reflexão, tendo em vista o alcançar da resposta.

Do meu ponto de vista, a discussão em grande grupo foi o segmento da aula onde esta foi mais evidente já que, com o apoio de uma projeção do GeoGebra foi explorado o ponto em que as duas retas referentes às representações gráficas se intersetavam, bem como a interpretação das coordenadas desse ponto no contexto do problema – que não foi muito trabalhado autonomamente pelos alunos.

No momento de discussão a aluna Clotilde questionou porque é que as retas não passavam na origem do referencial. Após pedir-lhe que indicasse as expressões algébricas das respetivas funções e, quando questionei os alunos sobre o tipo de função, estes disseram tratar-se de uma função afim. Logo a Clotilde indicara que uma sua representação gráfica não passaria na origem do referencial.

Aspetos globais

Começo por destacar que, infelizmente, um número considerável de alunos apagou ou alterou os seus registos escritos no momento de discussão em grande grupo, pelo que algumas destas produções não puderam ser analisadas, uma vez que os dados se encontram contaminados. Deste modo, para a análise foi muito importante o complemento às produções escritas, como a gravação áudio e vídeo.

Para a globalidade da tarefa, este foi também um momento de análise retrospetiva, no meu entender, fulcral para aprofundar um pouco mais os argumentos dos alunos e fazer a articulação explícita com a temática em estudo – já que, espontaneamente, os alunos não o fizeram ao longo das suas justificações.

Onze dos 15 pares de alunos optaram por utilizar o *software* GeoGebra, pelo que esta foi uma das estratégias dominantes. Indiscutivelmente o GeoGebra facilitou a resolução do problema na medida em que, com a possibilidade de utilização do computador os alunos mostraram-se desde logo predispostos a iniciar a tarefa, embora nem todos tenham utilizado este recurso. Pelo que conheço dos alunos e pelo que vivenciei na sala de aula, durante o seu trabalho autónomo, conjeturo que se, por um lado, alguns alunos se sentem aliciados em recorrer ao GeoGebra por ser um instrumento menos frequente na aula de Matemática, outros "evitam-no" por esse mesmo motivo ou porque consideram que não será utilizado em momentos de avaliação sumativa. Além do que referi, este mostrou-se um recurso que agiliza as estratégias dos alunos pois é de frisar que todos aqueles que optaram por recorrer a processos gráficos, nunca o fizeram com "lápis e papel", fizeram-no sim com uso do GeoGebra, tal como era esperado.

Deste uso bastante generalizado do GeoGebra, parece-me importante sublinhar que na sua maioria os alunos recorreram a estratégias gráficas, pelo menos em alguma das alíneas, salvo raras exceções, como é o caso do par Alberta e Piedade.

Além de recorrerem ao GeoGebra como estratégia de resolução que está bastante relacionada com a estratégia de *representar*, outras foram as estratégias heurísticas utilizadas, designadamente o *introduzir elementos auxiliares no problema*, por exemplo, sempre que os alunos atribuíam valores concretos ao número de horas do aluguer para tornar o problema mais acessível, permitindo-lhes *identificar um padrão* e estabelecer relações, bem como retirar conclusões. A *utilização de representações e esquemas na resolução do problema* foi também uma das estratégias presentes, mais particularmente, utilizadas por dois alunos para organizar os dados.

No que respeita aos conhecimentos mobilizados durante a realização desta tarefa, destaco pelo lado positivo que os alunos revelaram ter uma tendência para recorrer à interpretação gráfica das funções que, de um modo global, me parece ter sido bem conseguida, ainda que pudessem ter explorado um pouco mais estas representações. Já as noções de declive da reta, inclinação, coeficiente de uma função e constante de proporcionalidade direta ficaram um pouco mais diluídas nas argumentações dos alunos.

Do meu ponto de vista, os alunos mobilizaram os seus conhecimentos sobre funções afins e lineares ao interpretarem as funções apresentadas no enunciado, em duas representações distintas. Nesta tarefa considero que os alunos interpretaram adequadamente o seu contexto e, de um modo global, evidenciaram mobilizar os seus conhecimentos relativos à função afim e à sua representação gráfica, embora se tenha verificado que estes não interpretam com grande destreza as coordenadas de um ponto pertencente à interseção das retas que representam os gráficos das funções m e p. Em particular, os alunos revelaram ainda facilidade em utilizar notação algébrica, bem como evidenciaram uma tendência para a necessidade de um apoio gráfico para a interpretação das funções do problema.

Em jeito de síntese, apresento um esquema (Quadro 2) ilustrativo das estratégias e conhecimentos mobilizados pelos alunos na resolução do problema “Um passeio de bicicletas” (Figura 6).

Quadro 2 – Síntese das estratégias e conhecimentos mobilizados pelos alunos na resolução do problema “Um passeio de bicicletas”

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Estratégias heurísticas</th><th colspan="2">Noções mobilizadas</th></tr>
<tr><td></td><td>Sem recurso ao GeoGebra</td><td>Com recurso ao GeoGebra</td><td>Sem recurso ao GeoGebra</td><td>Com recurso ao GeoGebra</td></tr>
<tr><td>Alínea 1.1</td><td>- Interpretar os dados
- Calcular</td><td>- Interpretar os dados
- Representar graficamente</td><td rowspan="3">-Função/ constante de proporcionalidade direta
- Notação algébrica
- Cálculo da imagem, dado o objeto</td><td rowspan="3">-Função/ constante de proporcionalidade direta
- Interpretar representação gráfica de uma função
-Associar o custo mais elevado a uma reta com maior inclinação</td></tr>
<tr><td>Alínea 1.2</td><td>- Introduzir valores auxiliares no problema
- Identificar um padrão</td><td>-Introduzir valores auxiliares no problema</td></tr>
<tr><td>Alínea 1.3</td><td>- Realizar esquemas</td><td>- Representar graficamente</td></tr>
</table>

5.2. Ficha de Trabalho n.º 4: questão 1

O segundo problema analisado neste trabalho foi apresentado aos alunos integrado numa ficha de trabalho (Anexo 2.6). Ao elaborar este problema (Figura 22) tive a intenção de articular o tema das funções afins com a Geometria, pelo que, na análise das resoluções dos alunos darei destaque às estratégias que utilizaram e aos conhecimentos que mobilizaram para dar resposta a este problema. Trata-se de um problema que não tem solução única – um aspeto que não é muito familiar aos alunos.

1. O Ricardo diz que sabe usar o que aprendeu nas aulas de Matemática sobre equações de retas para desenhar um paralelogramo. Observa a figura e indica como o Ricardo pode obter um paralelogramo com vértices A, B, C e D, usando o seu conhecimento sobre equações de retas.

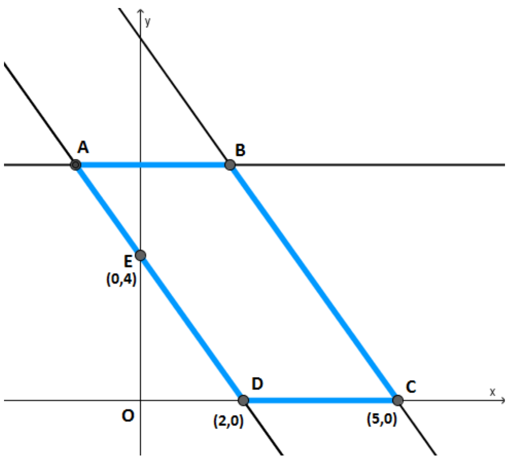


Figura 22 – Enunciado questão 1 da Ficha de Trabalho n.º 4

Em seguida realizo a análise das resoluções dos alunos tentando estudá-las de acordo com as fases de resolução de problemas enunciadas por Pólya (1957) e o principal objetivo é perceber como os alunos obtêm as equações de retas que podem definir um paralelogramo como o da figura.

Compreensão do problema

A primeira abordagem a este problema seguiu-se à leitura do enunciado por parte de um aluno. É de realçar que após esse momento os alunos leram o enunciado mais vezes, individualmente ou a pares. Neste primeiro contacto com o problema os alunos identificaram o paralelogramo de vértices A, B, C e D, no entanto revelaram dificuldades em reconhecer que o que aprenderam sobre equações de retas lhes poderia ser útil para explicar como poderiam obter um paralelogramo com os referidos vértices.

Muitos alunos solicitavam apoio pois não conseguiam avançar na resolução do problema, pelo que mostrou ser necessária uma maior intervenção das professoras de forma a contrariar esta tendência dos alunos.

Eventualmente, para conseguir que existisse uma adesão mais imediata, deveria ter chamado a atenção dos alunos para as retas suporte dos lados do paralelogramo. No entanto, nesse momento não o fiz pois considerei que poderia, de certa forma, minimizar a abertura da questão e condicionar as estratégias dos alunos. Ultrapassada esta dificuldade os alunos começaram a desenvolver um plano já que associaram o paralelismo às equações das retas.

Elaboração de um plano

Inicialmente, um número significativo de alunos focou-se em determinar as coordenadas no ponto A e muitos interrogaram “Como é que sabemos as coordenadas do A?”. Ao abandonar este primeiro plano, alguns focos viraram-se para encontrar as coordenadas do ponto B. Por exemplo, o Tomás referiu “Quero saber o ponto B! Sei que é dois, qualquer coisa [(2,…)], mas não tenho valores… como é que eu faço isto?”.

Enquanto uns alunos prosseguiram com a convicção de que precisavam determinar as coordenadas do ponto A, outros, após alguns esclarecimentos das professoras (que tentaram destacar as retas suporte dos lados do paralelogramo) centraram-se mais nas características dos lados de um paralelogramo.

Tal como pode ser observado nas Figuras 23 e 24 seguintes, os registos dos alunos são indicadores do estabelecimento de um plano, ao explicitar os dados que estão na figura do enunciado (ver Figura 22).

Figura 23 – Primeiro registo na resolução do problema, realizado pelo Tomás

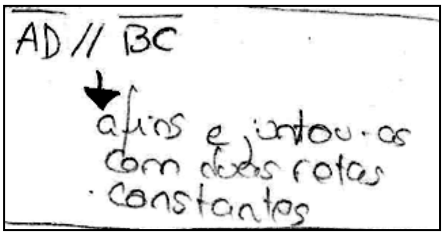


Figura 24 – Primeiro registo na resolução do problema, realizado pela Soraia

Na Figura 23, o registo do Tomás evidencia que as retas $\boldsymbol{AD}$ e $\boldsymbol{BC}$ são paralelas, assim como as retas $\boldsymbol{CD}$ e $\boldsymbol{AB}$, dado que, num paralelogramo, “os lados são paralelos”. A Soraia (Figura 24) destaca que para além de $\boldsymbol{AD}$ e $\boldsymbol{BC}$ serem paralelas, representam funções afins e juntas formam o paralelogramo com duas retas “constantes”, ou mais corretamente, com duas retas que representam funções constantes. Embora nem todos os alunos tivessem explicitado por escrito estas relações de paralelismo entre as retas, proferiram-no enquanto as professoras circulavam na sala. De um modo geral, ao frisarem o paralelismo os alunos percebem que têm de tirar partido desse elemento da figura e do que conhecem sobre equações de retas para que possam avançar na resolução.

A título de exemplo, a transcrição seguinte pode ser ilustrativa do modo como os alunos se focaram nas características do paralelismo entre os lados de um paralelogramo.

> **Prof.ª Nicole**: Como é que nós conseguimos determinar esse paralelogramo?
> **Alberta:** Com as coordenadas dos pontos!
> **Prof.ª Nicole:** Quantos lados “nós” temos [tem o paralelogramo]?
> (…)
> **Piedade:** Temos de descobrir como é que chegamos a essas funções!
> **Prof.ª Nicole:** …a essas retas. Exatamente.
> **Alberta:** Como é que descobrimos isto?
> **Piedade:** Então, nós já sabemos que estas retas [AD e BC] são paralelas…temos dois pontos [da reta AD], por isso, temos de descobrir a equação desta reta. Estás a perceber?

Fica, assim, explícito que o plano das alunas passa por atender ao paralelismo entre os lados [AD] e [BC] do paralelogramo, para escrever equações das retas, com a consciência de que, para tal, é necessário conhecer dois pontos (neste caso E e D).

Execução do plano

Dos 30 alunos da turma, dois apresentaram uma resposta muito incompleta e sete entregaram o registo da correção feita em grande grupo, pelo que estes dados não vão ser contabilizados na análise. Acrescento ainda que, tendo em conta o grau de dificuldade da tarefa proposta, e considerando os alunos em questão, penso que entregaram os seus registos com alterações realizadas durante a discussão porque, muito possivelmente, consideraram a sua resposta muito incompleta e tentaram encobrir esse dado. Da restante turma, 21 alunos, dez apresentaram uma resposta incompleta ao problema.

Depois de estabelecerem o plano, os alunos perceberam a necessidade de retirar informação da representação gráfica que o enunciado lhes fornecia, desse modo, a maioria dos alunos, registou as coordenadas dos pontos D e E. Implicitamente, esta busca de dados evidencia a mobilização de conhecimentos dos alunos, nomeadamente, compreender que se conhecem dois pontos de uma reta conseguem escrever a sua equação reduzida: começando pelo registo das coordenadas desses dois pontos e passando cálculo do declive. Assim, é percetível que a estratégia utilizadas pela maior parte dos alunos foi *segmentar o problema em etapas.*

Na Figura 25, apresento a primeira fase do segmentar o problema em etapas, ilustrativo de como o par Soraia e Ivan procedeu, à semelhança de outros colegas.

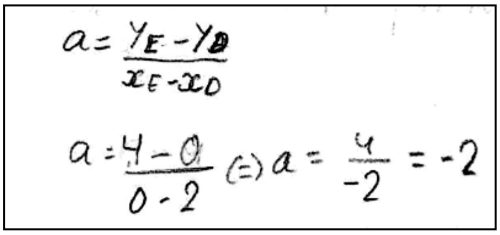


Figura 25 – Apresentação da expressão geral e cálculo analítico do declive, realizado pelo Ivan

Também conforme observei noutros alunos da turma, uma dificuldade sentida pelos alunos foi ao escrever a expressão geral para o cálculo do declive, tal como ocorreu com o Ivan. Ainda assim, destaco que nenhum aluno contestou a obtenção de um valor de declive negativo, pelo que posso conjeturar que os alunos revelam reconhecer a representação de uma reta com declive negativo, como uma reta com as característica de

$\boldsymbol{AD}$. Por exemplo, por um excerto do diálogo entre Alberta e Piedade é possível constatar que as alunas, após calcularem o valor do declive da reta $\boldsymbol{AD}$, mobilizam os seus conhecimentos referentes à relação entre o valor do declive e a inclinação da reta para validar o valor obtido:

> **Piedade:** Então o declive é menos dois porque [a reta] está virada para o lado esquerdo, ou seja, [o declive] é negativo.

Deste modo, a Piedade revela domínio das características gráficas da reta associada ao valor negativo do seu declive.

Ao contrário da Soraia, o Ivan não prosseguiu com a sua resolução, apresentando logo uma resposta ao problema (Figura 26).

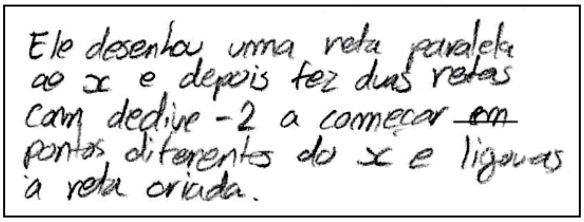

Ele desenhou uma reta paralela ao x e depois fez duas retas com declive -2 a começar ~~em~~ pontos diferentes do x e ligou as à reta criada.

Figura 26 – Resposta ao problema 1 da ficha de trabalho n.º 4, realizado pelo Ivan

Ainda que a resposta do Ivan tenha algumas incorreções penso que o que pretende dizer é que o Ricardo (rapaz mencionado no enunciado do problema) traça uma reta paralela ao eixo das abcissas e traça duas retas com declive menos dois, que intersetam a primeira e intersetam o eixo das abcissas em pontos distintos e, finalmente, ao unir estes últimos pontos, obtém-se uma reta paralela à primeira – embora não acautele o facto de esses pontos serem, obrigatoriamente, os pontos C e D. Alguns alunos abandonaram por completo a resolução do problema após determinarem o declive da reta.

Os restantes alunos, depois de calcularem o declive da reta $\boldsymbol{AD}$, continuaram a sua resolução, escrevendo de imediato a equação reduzida desta reta, como na figura seguinte:

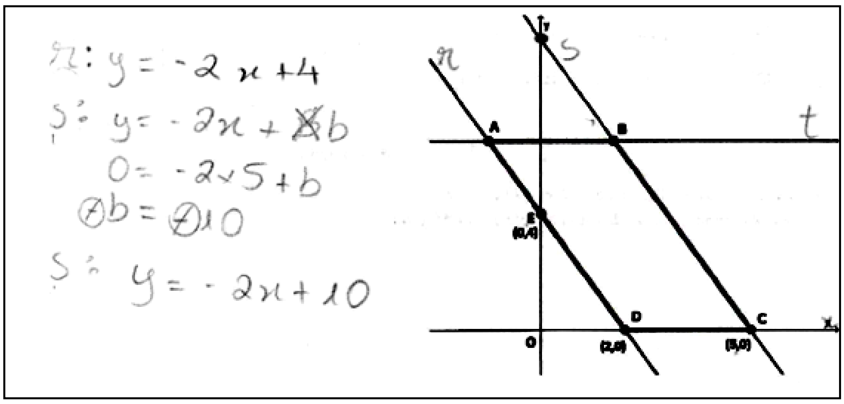


Figura 27 – Indicação das equações reduzidas relativas às retas $\boldsymbol{AD\ e\ BC}$, realizada pela Alberta

Este dado é indicador de que os alunos não só identificam e escrevem a expressão geral de uma equação reduzida de uma reta, como identificam corretamente o declive e a ordenada na origem nesta equação. Em particular, nenhum aluno realizou cálculos para determinar a ordenada na origem desta reta, reconhecendo este dado apenas por observação da representação gráfica (valor da ordenada do ponto E). Neste caso a Alberta designou a reta AD por r.

O passo seguinte adotado pelos alunos, como fez a Alberta (Figura 27) é escrever uma equação da reta BC. Posso, assim, conjeturar que foi novamente necessário mobilizarem os seus conhecimentos sobre o paralelismo de lados opostos de um paralelogramo. Acrescento que aqui os alunos revelaram aprendizagens no que respeita a considerarem duas retas paralelas como retas com igual valor de declive. Deste modo, a Alberta escreveu que uma equação da reta BC (ou s) será do tipo $y = -2x + b$.

Alcançada esta etapa na resolução do problema, os alunos sublinham a necessidade de determinar a ordenada na origem da reta BC, no entanto, esta seria a primeira vez que os alunos iriam resolver autonomamente uma questão em que tivessem de determinar a ordenada na origem de uma reta, recorrendo a um outro ponto que pertencesse à reta. Dado que os alunos não conseguiram ultrapassar este constrangimento, foi necessário fazer um esclarecimento mais alargado à turma sobre o cálculo da ordenada na origem da reta nestas condições. O referido constrangimento veio acentuar o caráter problemático da questão.

Ultrapassada esta dificuldade, os alunos escreveram uma equação da reta BC como $y = -2x + 10$, em que dez era o valor da ordenada na origem procurado. Até ao momento os alunos tinham então equações das retas AD e BC, no entanto, ainda estavam em falta as equações das retas AB e CD.

Na Figura 28, apresento a parte final da resolução da Alberta, cuja estratégia foi também utilizada por outros cinco alunos.

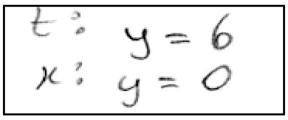


Figura 28 – Equações das retas $\boldsymbol{AB}$ ***e*** $\boldsymbol{CD}$, escritas pela Alberta

Ao observar o que a aluna escreveu e pelo que me apercebi em sala de aula, os alunos olharam para a figura marcada no referencial como se estivesse feita à escala. Então, enquanto uns fizeram medições e concluíram que a ordenada dos pontos A e B seria seis, outros alunos chegaram a esse valor por estimativa. Assim sendo, realço que os alunos adotaram a estratégia de medição para escrever uma equação da reta AB. Por observação gráfica, concluíram, sem dificuldades que a reta CD estava sobre o eixo das abcissas, logo os alunos mobilizaram os seus conhecimentos e indicaram que $y = 0$ é uma equação da reta CD.

A título de exemplo, fica registada mais uma resposta a este problema (Figura 29).

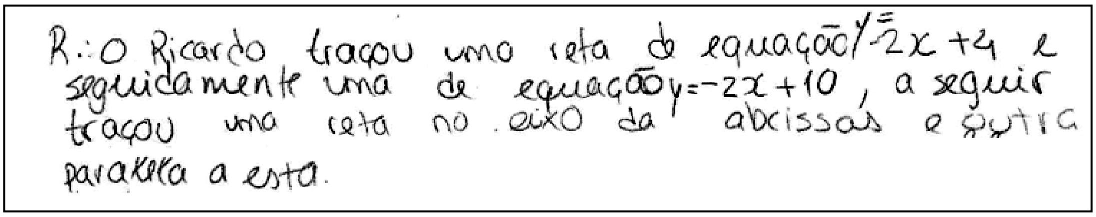

R.: O Ricardo traçou uma reta de equação y=-2x+4 e seguidamente uma de equação y=-2x+10, a seguir traçou uma reta no eixo da abcissas e outra paralela a esta.

Figura 29 – Resposta ao problema 1 da ficha de trabalho n.º 4, realizada pela Concha

Concha evidencia na sua resposta que não sentiu necessidade de atribuir um valor à ordenada dos pontos A e B. À semelhança de mais três alunos, Concha observou que para construir o paralelogramo, para além das equações das retas AD e BC, necessitaria apenas da equação da reta que se sobrepõe ao eixo das abcissas e de outra reta paralela a esta (independentemente do valor, positivo, que possa tomar).

Assim, como referiram outros alunos, uma equação para a reta AB poderá ser $y = b$, com b um valor constante e positivo.

Análise Retrospetiva

De acordo com a minha opinião, a primeira fase de análise retrospetiva ocorreu para alguns alunos quando estes iniciaram o estabelecimento do plano e tentaram determinar as coordenadas por vértices do paralelogramo, mais especificamente, as coordenadas de A e B. Aqui, o questionamento das professoras foi essencial para que os alunos refletissem, de facto, sobre como o que conhecem acerca de equações de retas lhes permitiria obter o paralelogramo pretendido.

Após o cálculo do declive, surge, quanto a mim outra fase de análise retrospetiva, dado que os alunos obtiveram um valor negativo para o declive das retas AD e BC. Neste momento, os alunos tiveram de confrontar o resultado obtido com a representação gráfica dessas retas. Além disso, sempre que os alunos escreviam a equação de cada uma das quatro retas tiveram que, do meu ponto de vista, questionar-se "o que falta" para que pudessem indicar como o Ricardo pôde obter o paralelogramo traçado. A permanente análise retrospetiva culminou quando, no final, os alunos tiveram de reunir toda a informação para que pudesse dar uma resposta ao problema – ainda que nem todos o tivessem feito.

Também o segmento da aula dedicado à discussão deste problema foi oportuno para analisar que, de facto, a equação associada à reta AB permitia uma multiplicidade de respostas. Neste caso, pareceu-me importante tentar destacar este aspeto em grande grupo, já que a maioria dos alunos da turma se concentrou em determinar um valor para a função constante associada à reta AB.

Aspetos globais

Também na análise das resoluções deste problema destaco que não foi possível considerar os dados de todos os alunos, em todo o caso, penso que foi reunido um interessante conjunto de dados.

Dou primeiro relevo ao trabalho do par Alberta e Piedade que optou por determinar uma equação concreta para cada uma das retas suporte dos lados do paralelogramo. Já as resoluções do par Ivan e Soraia, embora tenham tido desfechos distintos, ambas assumiram que a função constante representada pela reta horizontal AB poderia admitir qualquer valor, o que, tal como a resposta apresentada pela Concha (Figura 29), revela um nível de abstração muito interessante bem como torna evidente que alguns alunos não sentiram necessidade de encontrar uma resposta única para o problema, ainda que a grande maioria evidenciasse essa necessidade – apenas dissipada com a ajuda das professoras.

Outra das estratégias a destacar nestas resoluções, desta vez pelo lado negativo, foram as aproximações e medições efetuadas por alguns alunos, na tentativa de alcançar um valor concreto para a equação da reta AB. Este facto pode denunciar a dificuldade que os alunos sentem em abstrair-se do que é concreto.

Além disso, merece ainda destaque o facto de alguns alunos abandonarem a resolução do problema após efetuarem o cálculo do declive da reta *AD*, o que pode indiciar que algumas dificuldades poderão estar associadas ao cálculo da ordenada na origem da reta. Esta dificuldade pode ter sido acentuada pelo facto de os alunos ainda não terem resolvido autonomamente questões em que tivessem que determinar a ordenada na origem de uma reta, recorrendo a um outro ponto da reta, pelo que o carácter problemático desta questão foi acentuado. Atendendo a esta dificuldade acrescida, e não intencional, reflito acerca da minha prática enquanto futura professora, o que me remete, uma vez mais, para a permanente necessidade de antecipar as possíveis dificuldades dos alunos e a importância de minimizar o ruído que pode trazer um "elemento" mal ponderado para a resolução de um problema e, mais globalmente, e o que mais me inquieta, para a aprendizagem dos alunos.

Quanto aos conhecimentos mobilizados pelos alunos, pelo que apresentaram, posso conjeturar que estes demonstraram conseguir associar retas paralelas a retas com o mesmo declive, bem como argumentar que duas retas horizontais são paralelas e, além disso, revelaram aprendizagens no que respeita à transição da representação gráfica para a algébrica.

Finalmente, no que respeita às heurísticas utilizadas, penso que foi consensual o *segmentar o problema em etapas* a partir do momento em que reconheceram o uso das características do paralelogramo, quanto ao paralelismo entre lados opostos, para encontrar as equações das retas. As estratégias adotadas pelos alunos na resolução deste problema, bem como os principais conhecimentos que mobilizaram são sintetizados no Quadro 3.

Quadro 3 – Síntese das estratégias e conhecimentos mobilizados pelos alunos na resolução do problema da Ficha de Trabalho n.º 4, questão 1

Estratégias heurísticas	Noções mobilizadas
Sem recurso ao GeoGebra	Sem recurso ao GeoGebra
- Segmentar o problema em etapas	- Propriedades de um paralelogramo - Reconhecer duas retas paralelas como tendo o mesmo declive - Equação reduzida de uma reta - Cálculo analítico do declive - Determinar a ordenada na origem de uma reta, recorrendo a um outro ponto da reta - Reta horizontal - Função constante

5.3. Ficha de Trabalho n.º 4: questão 3

O estudo deste problema (Figura 30) tem como principal objetivo perceber de que modos os alunos interpretam uma situação em que o enunciado é dado em linguagem natural. Neste caso, dadas as coordenadas de três pontos, os alunos teriam que encontrar uma reta paralela a uma reta determinada por dois desses pontos e que passe pelo terceiro.

3. Considera os pontos $A(2,5)$, $B(8,-7)$ e $P(-3,9)$.
Escreve uma equação da reta paralela à reta AB e que passe pelo ponto P.

Figura 30 – Enunciado da questão 3 da Ficha de Trabalho n.º 4

Agora passo à análise das produções dos alunos atendendo às etapas que seguiram na resolução do problema e às estratégias que utilizaram, sendo que neste caso não tiveram acesso ao *software* GeoGebra.

Compreensão do problema

Neste problema era esperado que os alunos revelassem algumas dificuldades ao nível da compreensão do enunciado, o que de facto ocorreu, já que estiveram algum tempo a tentar interpretá-lo. Diversos alunos apenas revelaram sentir necessidade de traduzir o enunciado sobre a forma de um esboço ou da representação num referencial ortogonal e monométrico.

Globalmente, os alunos ultrapassaram essas dificuldades sozinhos e avançaram na resolução do problema, mas reforço que, para esta compreensão, muito contribuiu a tradução do enunciado numa representação gráfica.

Elaboração de um plano

Após interpretarem o problema os alunos confrontaram-se com os dados disponíveis: as coordenadas de três pontos e o objetivo do problema – escreverem a equação de uma reta paralela à reta AB e que passe no ponto P.

Foram precisamente os dados disponibilizados no enunciado do problema que impulsionaram o desenvolvimento de um plano, já que, recorrendo à interpretação do enunciado e/ou à representação da situação, os alunos reconheceram que a equação de uma reta paralela a AB teria o mesmo declive que esta reta e que esse dado lhes permitiria escrever uma equação reduzida da reta, para a qual ainda precisavam determinar a ordenada na origem.

Execução do plano

Apenas dois alunos apresentaram uma resposta muito incompleta, os restantes 28 mostraram resoluções completas, embora quatro alunos apresentem respostas incorretas.

Dos alunos da turma, sete sentiram necessidade de traduzir o enunciado para uma representação gráfica num referencial cartesiano, tal como fez o Ivan (Figura 31).

Ainda que esta estratégia fosse expectável, foi adotada por um número de alunos superior ao esperado, o que pode indicar que os alunos valorizam e estão familiarizados com este tipo de representação. Inclusivamente, o Ivan colou uma folha quadriculada na folha de resposta ao problema para ter maior facilidade em traçar as retas, o que denota a necessidade de os alunos se apoiarem na representação gráfica. Ora esta estratégia utilizada pelos alunos relaciona-se com a *utilização representações e esquemas na resolução do problema.*

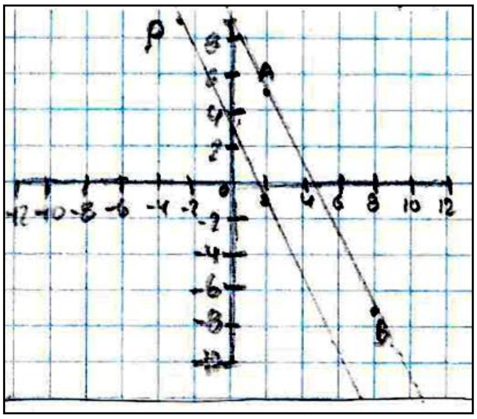


Figura 31 – Representação gráfica do enunciado da questão 3 da Ficha de Trabalho n.º 4, realizada pelo Ivan

À semelhança de outros cinco alunos, o Ivan traçou um referencial ortogonal e monométrico e marcou os pontos A, B e P, traçando ainda a reta $\boldsymbol{AB}$ e a reta paralela a esta, que passa no ponto P. Ao interpretarem as representações obtidas, sublinho o modo como os alunos mobilizaram os seus conhecimentos sobre a temática e, como pretendiam uma equação de uma reta paralela a $\boldsymbol{AB}$, consideraram necessário determinar o declive desta reta – que foi o ponto de partida para a resolução algébrica, para os alunos que a iniciaram com as representações gráficas.

Toda a turma, tenha ou não recorrido à representação gráfica, evidenciou que conhecia dois pontos da reta $\boldsymbol{AB}$, pelo que poderiam calcular o seu declive – como é realizado pela Cátia (Figura 32).

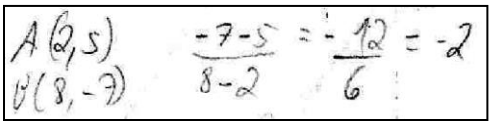


Figura 32 – Cálculo analítico do declive da reta AB, realizado pela Cátia

A aluna calculou o valor do declive da reta *AB* de forma correta, tal como a restante turma, com exceção de três alunos que aplicaram incorretamente a forma geral do cálculo do declive. Apesar de ser bastante positivo apenas três alunos revelarem dificuldade no cálculo do declive, este constrangimento não seria esperado já que anteriormente, nesta mesma aula, a turma tinha calculado analiticamente o declive de outra reta.

Depois de calcularem o declive, quase todos os alunos escrevem uma equação de reduzida da reta, revelando que reconhecem que quando duas retas são paralelas têm o mesmo declive. Assim, tal como escreveu a Concha (Figura 33), os alunos apresentaram a expressão $y = -2x + b$ como expressão geral de uma reta paralela a AB.

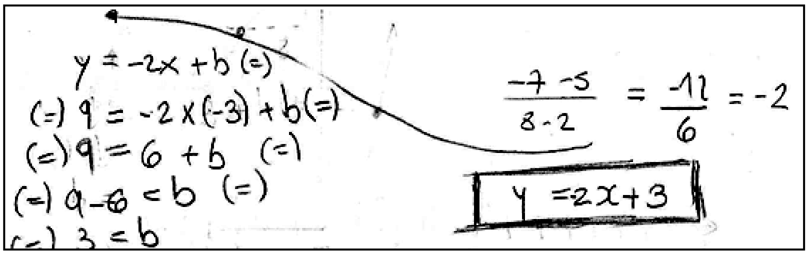


Figura 33 – Resposta ao problema da questão 3 da Ficha de Trabalho n.º 4, realizada pela Concha

À semelhança dos restantes alunos que alcançaram esta fase de resolução do problema, a Concha substituiu os valores das coordenadas do ponto $\boldsymbol{p}$ na expressão acima referida, obtendo desse modo uma equação do primeiro grau com uma incógnita que permite determinar a ordenada na origem da reta paralela à reta $\boldsymbol{AB}$ e que passa no ponto P. Ora, todo este raciocínio evidencia que os alunos revelam aprendizagens e mobilizaram os seus conhecimentos referentes à associação entre retas paralelas e as que têm o mesmo declive, bem como ao cálculo da ordenada na origem, conhecido o valor do declive e um ponto da reta.

De salientar que a aluna Cátia (Figura 34) revelou um raciocínio incorreto pois apresentou a equação $\boldsymbol{y = -2x + 9}$ como uma equação de uma reta paralela a $\boldsymbol{AB}$ e que passa no ponto P.

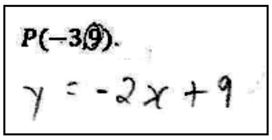


Figura 34 – Resposta ao problema da questão 3 da Ficha de Trabalho n.º 4, realizada pela Cátia

Na Figura 34 é possível observar que a aluna contorna a ordenada do ponto P, nove, e é precisamente esse valor que atribui à ordenada na origem. No centro desta conceção errónea de Cátia pode estar uma confusão entre "ordenada na origem" e "ordenada do ponto", já que não encontro outra justificação plausível para tal.

Particularizando a resolução para o par Alberta e Piedade, ambas as alunas iniciaram a resolução ao esboçar um gráfico, tal como na figura 31, e quando questionadas sobre como estavam a pensar, responderam do seguinte modo:

> **Piedade:** Eu calculei o declive!...A reta é paralela a *AB*.
> **Prof.ª Nicole:** Então e agora, o que é que nós precisamos para escrever a equação?
> **Piedade:** A ordenada na origem.
> **Prof.ª Nicole:** E nós conhecemos a ordenada na origem?
> **Piedade:** Não!... Vamos substituir o xe o y [na equação $y = -2x + b$] por um ponto qualquer.

Questionei então as alunas se, de facto, podiam substituir, ao que a Alberta apontou para o ponto P no desenho que fez, referindo-se que teriam de substituir o xe o y pelas coordenadas desse ponto para determinar a ordenada na origem.

Porém, pensando no par Ivan e Soraia, apenas esta última aluna resolveu o problema por métodos exclusivamente analíticos, já que Ivan também esboçou as retas.

É, portanto, de destacar que, independentemente da abordagem inicial ao problema, todos os alunos *segmentaram o problema em etapas.*

Análise Retrospetiva

Na generalidade da turma, destaco que os alunos não sentiram necessidade de apresentar uma resposta formal ao problema. Admito que esta opção dos alunos possa estar relacionada com o tipo de resultado obtido (a equação de uma reta), que vale por si só.

Da análise que realizei às produções dos alunos parece-me evidente que estes se foram questionando sempre que avançavam uma etapa no processo de resolução do problema. Por exemplo, este aspeto é quanto a mim bem visível, sobretudo para os alunos que esboçaram a reta AB, já que ao calcular o declive da reta obtiveram um valor negativo, tendo sido necessário confrontar a representação gráfica da reta AB com o declive negativo da reta.

Aspetos globais

Gostaria de destacar que da análise que realizei são claras as aprendizagens evidenciadas pelos alunos no respeita à tradução entre representações de linguagem natural para representações gráficas ou algébricas, entre representações gráficas para algébricas, bem como no domínio da equação reduzida da reta. De salientar alguns erros associados à expressão geral para cálculo do declive, mas numa minoria dos alunos.

Se, por um lado, esperava que os alunos revelassem algumas dificuldades na resolução deste problema, por outro, não contava com o modo como estes me poderiam surpreender com as estratégias por eles utilizadas. Refiro-me essencialmente ao número de alunos que recorreu a representações gráficas do enunciado e, em particular ao Ivan, que colou folha quadriculada na folha de resposta. É, portanto, evidente que para a resolução deste problema os alunos recorreram à estratégia heurística: *utilizar representações e esquemas na resolução do problema.*

Do meu ponto de vista, os alunos também evidenciaram necessidade de *segmentar o problema em etapas*, estando esta presente nas resoluções de todos os alunos: já que calculam o declive da reta AB, escrevem a equação geral de uma reta paralela, determinam a sua ordenada na origem de modo a que passe pelo ponto P e, finalmente, escrevem a equação da reta pretendida.

Por fim, no Quadro 4, apresento a esquematização das estratégias e conhecimentos mobilizados pelos alunos na resolução do terceiro problema analisado.

Quadro 4 – Síntese das estratégias e conhecimentos mobilizados pelos alunos na resolução do problema da Ficha de Trabalho n.º 4, questão 3

Estratégias heurísticas	Noções mobilizadas
Sem recurso ao GeoGebra	Sem recurso ao GeoGebra
-Utilizar representações e esquemas na resolução do problema -Segmentar o problema em etapas	- Interpretar a representação gráfica de uma função -Calcular o declive -Equação reduzida de uma reta $y = ax + b$ -Relacionar paralelismo de duas retas e o seu declive -Converter representações

5.4. Entrevista: Problema 1

A figura seguinte diz respeito à primeira questão da entrevista (Anexo 6.1) realizada a dois pares de alunos da turma: Alberta e Piedade, Ivan e Soraia. Os alunos trabalharam a pares na resolução desta tarefa mas fizeram registos individuais, como anteriormente referi. Ao propor este problema tive como principal objetivo analisar como os alunos interpretam a função afim num contexto geométrico e, além disso, perceber a que estratégias recorrem e que conhecimentos mobilizam na resolução deste problema.

1. Considera o triângulo $[ABC]$ e um ponto P que se encontra sobre o lado $[AC]$ deste triângulo, como representado na figura seguinte.

Calcula a área do triângulo $[ABC]$, explicando a tua resposta.

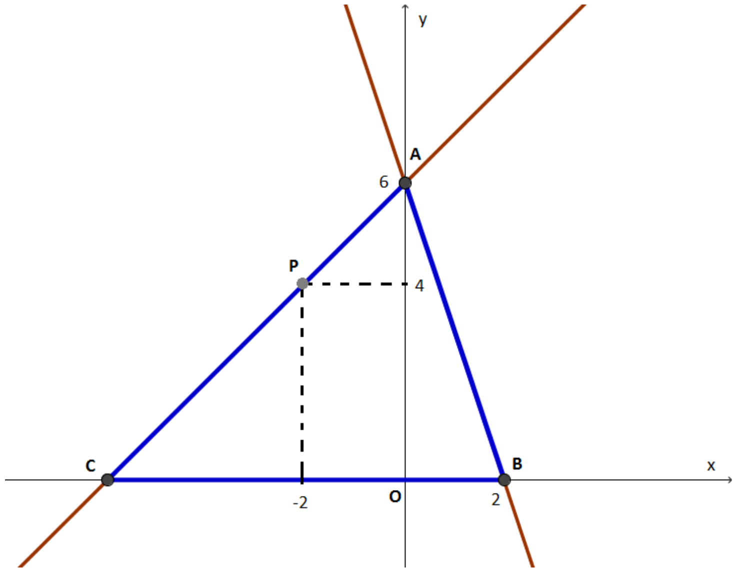


Figura 35 – Enunciado do problema 1 da Entrevista

Como é percetível na figura 35, o triângulo $[ABC]$ é delimitado por três retas, às quais os alunos precisam recorrer para calcular a área do referido triângulo.

Em seguida, analiso as produções escritas dos dois pares de alunos, separadamente, atendendo também aos registos áudio realizados durante a entrevista.

5.4.1. Alberta e Piedade

Começo por apresentar as produções escritas finais das duas alunas na resolução do primeiro problema da entrevista, para facilitar a compreensão da explicação que se apresenta em seguida. Nas figuras 36 e 37 verifica-se que, globalmente, as alunas seguiram procedimentos bastante idênticos e determinaram corretamente a área do triângulo $[ABC]$. As alunas começam por indicar a expressão do cálculo da área de um triângulo, determinam o declive da reta AC e escrevem a equação desta mesma reta, após calcularem o valor da ordenada na origem. Por fim, calculam a área do triângulo $[ABC]$.

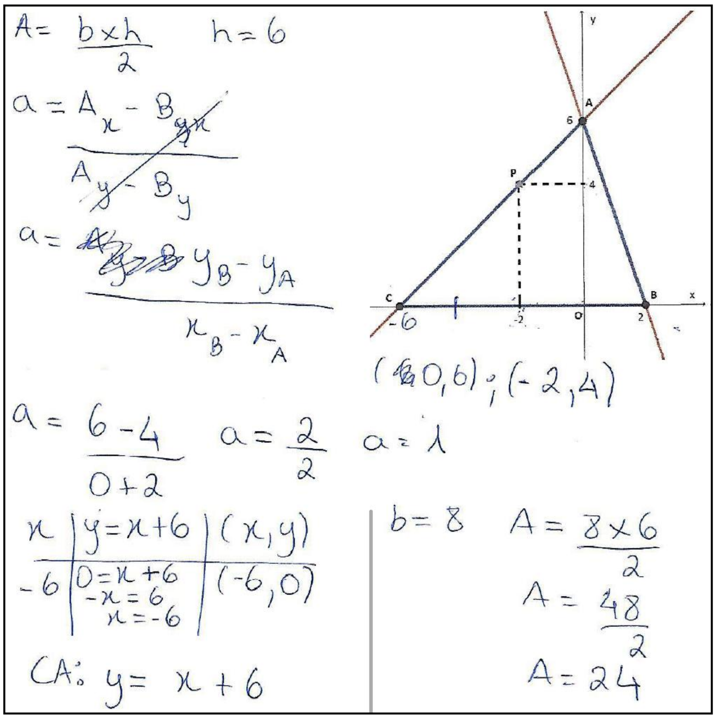


Figura 36 – Resolução da Alberta – problema 1 da entrevista

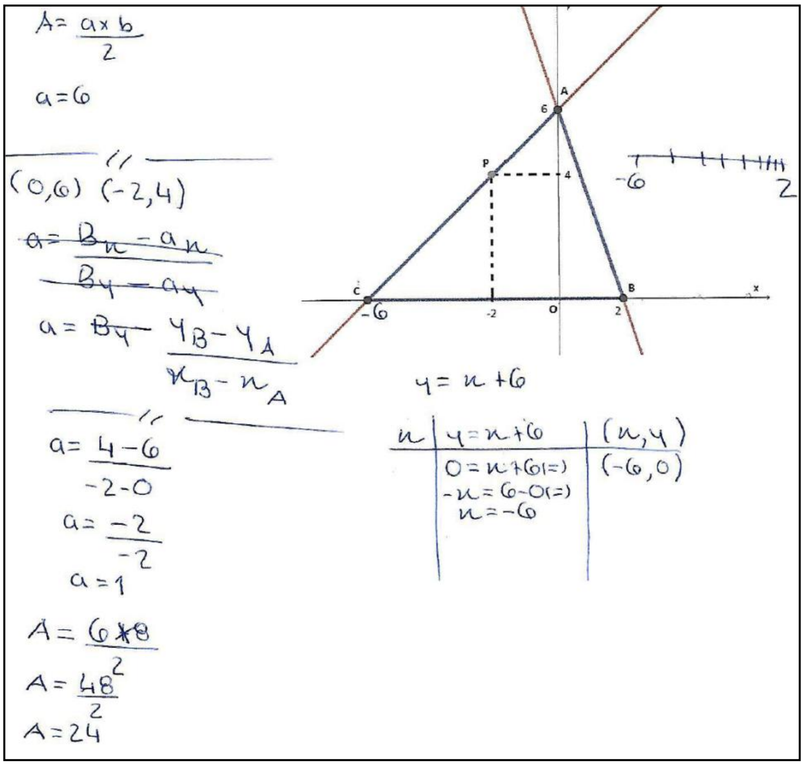


Figura 37 – Resolução da Piedade – problema 1 da entrevista

Vejamos, de seguida, com mais pormenor, como as alunas procederam ao longo da resolução deste problema (Figura 35), considerando as fases de resolução de problemas enunciadas por Pólya (1957).

Compreensão do problema

Na abordagem a este problema a Piedade leu espontaneamente, em tom alto, o seu enunciado. As alunas identificaram claramente o triângulo $[ABC]$ assim como as coordenadas dos pontos $A(0,6), B(2,0)$ e $P(-2,4)$. Para além destes dados, Alberta e Piedade expressaram a necessidade de calcular a área do triângulo $[ABC]$ mas mostraram alguma hesitação em como fazê-lo. Quando questionadas sobre como calcular a área de um triângulo, afirmaram:

> **Alberta:** A área é igual a base… não essa é do trapézio. É qualquer coisa a dividir por dois… É base, mais…
> **Piedade:** …altura …
> **Alberta e Piedade:** … a dividir por dois.
> **Prof.ª Inês:** "Mais"?
> **Alberta e Piedade:** Menos! [pausa] Não, vezes!

É, portanto, evidente alguma confusão por parte das alunas ao indicar a expressão geral para calcular a área de um triângulo, o que pode estar relacionado com alguma insegurança nos seus conhecimentos que revelam, por vezes, nas aulas.

Como este par identificou que cada um dos lados do triângulo está sobre uma reta e evidenciou a necessidade de determinar a abcissa do ponto C para determinar o comprimento da base do triângulo, penso que as alunas compreenderam o problema. Para esta compreensão pareceu-me essencial a troca de ideias entre os alunos e o questionamento realizado pela minha colega, como no diálogo seguinte:

> **Piedade**: (após ler o enunciado) Isto é seis [(0,6)].
> **Prof.ª Inês**: O que é que é seis?
> **Piedade**: O ponto A.
> **Alberta**: Sim.
> **Prof.ª Inês:** O que é que esse seis representa do triângulo?
> **Alberta e Piedade:** É a altura do triângulo.
> **Alberta:** O ponto B é o dois [(2,0)].
> **Piedade:** O ponto P é menos dois, quatro… e o ponto C não sabemos.
> **Prof.ª Inês**: E precisamos do ponto C? Para quê?
> **Piedade**: Sim, porque assim sabendo este [abcissa do C] sabemos o lado deste [aponta para o segmento de reta [OC]].

Relativamente à articulação da informação entre a figura e o enunciado escrito, nesta fase inicial, pareceu-me que as alunas apesar de indicarem as coordenadas do ponto P não lhe atribuíram nenhum significado particular no problema. Pela última frase da Piedade, esta parece estar a decompor o triângulo [ABC] em dois triângulos menores: [AOC] e [ABO].

Elaboração de um plano

Embora as alunas identificassem que os lados do triângulo eram segmentos de reta e que, para que pudessem determinar a área, teriam de calcular a abcissa do ponto C (incógnita), revelaram dificuldades em explicitar a expressão geral do cálculo da área do triângulo, como revela a transcrição anterior.

Ultrapassada essa dificuldade, as alunas registaram na sua folha a expressão geral para o cálculo da área de um triângulo, tendo optado a Piedade por designar a altura por a (Figura 38) e a Alberta, por h (Figura 39).

$$A=\frac{a\times b}{2} \qquad a=6$$

Figura 38 – Expressão para o cálculo da área de um triângulo escrita pela Piedade

$$A=\frac{b\times h}{2} \qquad h=6$$

Figura 39 – Expressão para o cálculo da área de um triângulo escrita pela Alberta

Apesar de anteriormente terem decomposto o triângulo $[ABC]$ aperceberam-se da necessidade de considerar a base deste triângulo (designada por b) identificando-a como o sendo o segmento de reta $[BC]$ - indicando-a com o lápis sobre a figura do enunciado. O par reconheceu a necessidade de determinar a abcissa do ponto C e, após questionamento pela professora, este foi associado à reta $[AC]$:

> **Prof.ª Inês:** Como podemos descobrir o ponto C?
> **Piedade**: Boa pergunta…
> **Alberta:** Então, isto aqui (aponta para a reta $[AC]$) é uma função afim… tem algo a ver!?
> **Prof.ª Inês:** Sim, é uma reta.

A partir daqui as alunas pareceram encontrar um método para determinar a abcissa do ponto C, já que o associam com um ponto pertencente ao gráfico de uma função afim – neste caso a reta AC – e dão a entender que precisam escrever a equação desta reta.

Após estas dificuldades iniciais o par parece ter delineado um plano, com base na expressão geral do cálculo da área, e prepara-se para executá-lo

Execução do plano

A Alberta e a Piedade depararam-se com a necessidade de determinar a base do triângulo [ABC], assim, subdividiram este problema em dois, já que, para calcular a área do triângulo, precisavam conhecer a abcissa do ponto C. Deste modo, das estratégias heurísticas apresentadas no Capítulo dois deste trabalho, posso indicar que este par adotou a estratégia de *segmentar o problema em etapas*.

Ora, independentemente das notações utilizadas (Figuras 38 e 39), as alunas começaram por indicar corretamente a expressão para o cálculo da área do triângulo e considerar a ordenada do ponto A como altura do triângulo, concluindo ser seis.

Depois de expressarem a altura do triângulo as alunas identificaram as coordenadas do ponto C como sendo do tipo $(x, 0)$ e indicaram que precisavam conhecer a abcissa deste ponto para conseguir determinar a base do triângulo.

As alunas concluíram ainda ser necessário calcular o declive para escrever a equação da reta AC, como está explícito no diálogo seguinte entre Alberta e Piedade.

> **Alberta:** Então…sabemos que o declive é negativo, não! É positivo!
> **Piedade:** É negativo…
> **Prof.ª Inês:** Negativo ou positivo?
> **Alberta e Piedade:** Positivo, positivo!
> **Prof.ª Inês:** Porquê?
> **Piedade:** Porque a reta está virada para o lado positivo.
> **Alberta:** Porque a reta está a subir.
> (…)
> **Prof.ª Inês:** Como é que podemos calcular o declive?
> **Piedade:** Se fosse [a aluna pensa um pouco]… Ah, não, não. Nós só podemos fazer isto nas funções lineares, o quatro a dividir pelo menos dois [referindo-se às coordenadas do ponto P].
> (…)
> **Alberta:** Neste caso precisamos de dois pontos.

Após reconhecerem a necessidade de calcular analiticamente o declive e antes de o calcularem, as alunas observam as características da reta e, apesar de alguma hesitação, referem que o declive da reta AC é positivo dadas as características da reta, que dizem estar a “subir”. Além disso, emergiu também a questão do cálculo do declive para equações lineares. Embora as alunas tenham mostrado segurança na interpretação do declive, revelaram algumas dificuldades ao enunciar a expressão geral para o cálculo do declive, como ilustra a figura 40.

$$a = \frac{A_x - B_{\cancel{y}x}}{A_y - B_y}$$

Figura 40 – Primeira expressão do cálculo analítico do declive de uma reta escrita pela Piedade

A Piedade e a Alberta escreveram a expressão de forma análoga, trocando apenas o A e o B. Quando questionadas sobre como alcançaram a expressão, e pela figura 40, pode perceber-se que colocaram o x e o y em índice, ao invés dos pontos A e B. Além disso, ao escrever a expressão geral do cálculo do declive, não atenderam a que, no numerador, se encontra a diferença das ordenadas dos pontos e, no denominador, a diferença das abcissas.

Na figura 41 apresento o cálculo analítico do declive, elaborado pela Piedade, após a clarificação do cálculo do declive.

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$a = \frac{6-4}{0+2} \qquad a = \frac{2}{2} \qquad a = 1$$

Figura 41 – Expressão do cálculo analítico do declive da reta $\boldsymbol{AC}$, realizado pela Piedade

Destaco ainda, como é possível observar, que apesar de recorrer aos pontos $A(0{,}6)$ e $P(-2{,}4)$ para calcular o declive, Piedade enunciou a expressão geral com os pontos A e B. As alunas obtiveram o mesmo valor para o declive, um, e aceitaram-no com naturalidade já que anteriormente expressaram a sua convicção acerca da obtenção de um valor positivo.

O cálculo do declive, permitiu ao par escrever uma equação da reta AC, como apresentado na figura 42.

$$a = \frac{6-4}{0+2} \qquad a = \frac{2}{2} \qquad a = 1$$

$$CA: \; y = x + 6$$

x	$y = x + 6$	(x, y)
-6	$0 = x + 6$ $-x = 6$ $x = -6$	$(-6, 0)$

Figura 42 – Cálculo da abcissa do ponto C a partir da equação da reta $\boldsymbol{AC}$, realizado pela Alberta

A figura 42 é representativa do caminho que a Alberta e a Piedade adotaram, por recorrerem a tabelas na resolução de sistemas (tópico que estudaram na aula anterior a esta entrevista), ainda que a tabela tenha sido apenas para organizar a escrita, uma vez que o resultado obtido surge na primeira coluna da tabela (Figura 39). Ao resultar do cálculo da abcissa do ponto C um valor negativo, pareceu-me evidente que não duvidaram deste facto, dado confrontarem o valor obtido com a posição do ponto C no referencial fornecido pelo enunciado do problema. No entanto, este valor negativo levantou constrangimentos para o cálculo da medida do comprimento do segmento $[BC]$.

É agora de realçar as estratégias que adotaram para perceber qual a medida do comprimento da base do triângulo (Figura 43).

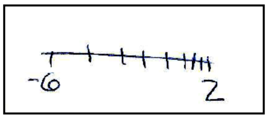


Figura 43 – Representação usada pela Piedade para indicar a medida do comprimento do segmento $[\boldsymbol{BC}]$

A Piedade (Figura 43) adotou um recurso bastante peculiar ao traçar uma reta numérica vazia e sem rigor de construção, dizendo à Alberta, que recorria àquela estratégia para não se enganar. Adotou assim um sistema de contagem, uma unidade por cada espaço na reta, obtendo o valor 8.

Este par deu por concluído o problema ao calcular a área do triângulo $[ABC]$ como na figura 44.

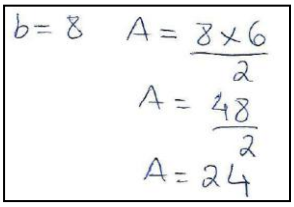


Figura 44 – Cálculo da área do triângulo [ABC] realizado pela Alberta

Análise Retrospetiva

Segundo a minha interpretação, a análise retrospetiva ocorreu na fase de resolução do problema em que as alunas, ao determinarem a abcissa do ponto C, foram confrontados com um valor negativo – o menos seis. O confronto entre este valor negativo e a posição do ponto C no referencial foi quase imediato mas, ainda assim, foi percetível que as alunas observaram o gráfico e acordaram “fazer sentido”.

Após a resolução desta questão, ainda que a professora não tivesse questionado as alunas, destaco que estas não sentiram necessidade de apresentar uma resposta final ao problema, nem de apresentar unidades quando indicam a área do triângulo.

5.4.2. Ivan e Soraia

As resoluções ao primeiro problema da entrevista dos alunos Ivan e Soraia são apresentadas nas figuras seguintes (Figuras 45 e 46). Estes alunos resolveram corretamente o problema mas friso que alguns dos elementos das produções escritas foram acrescentados após a resolução inicial dos alunos – como terei oportunidade de explicitar mais à frente.

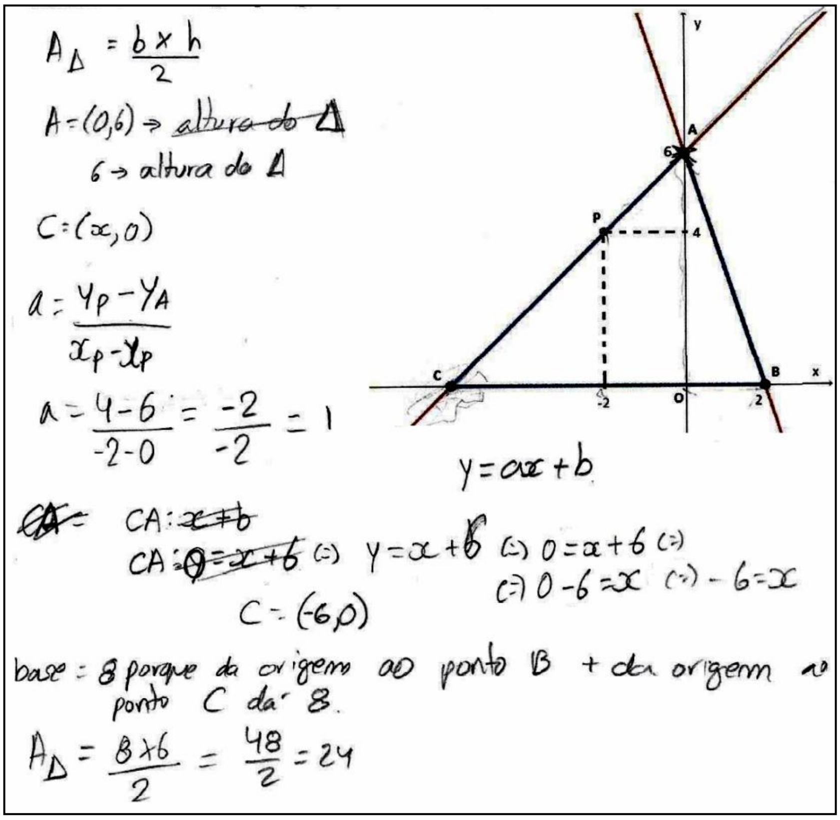


Figura 45 – Resolução do Ivan **–** problema 1 da entrevista

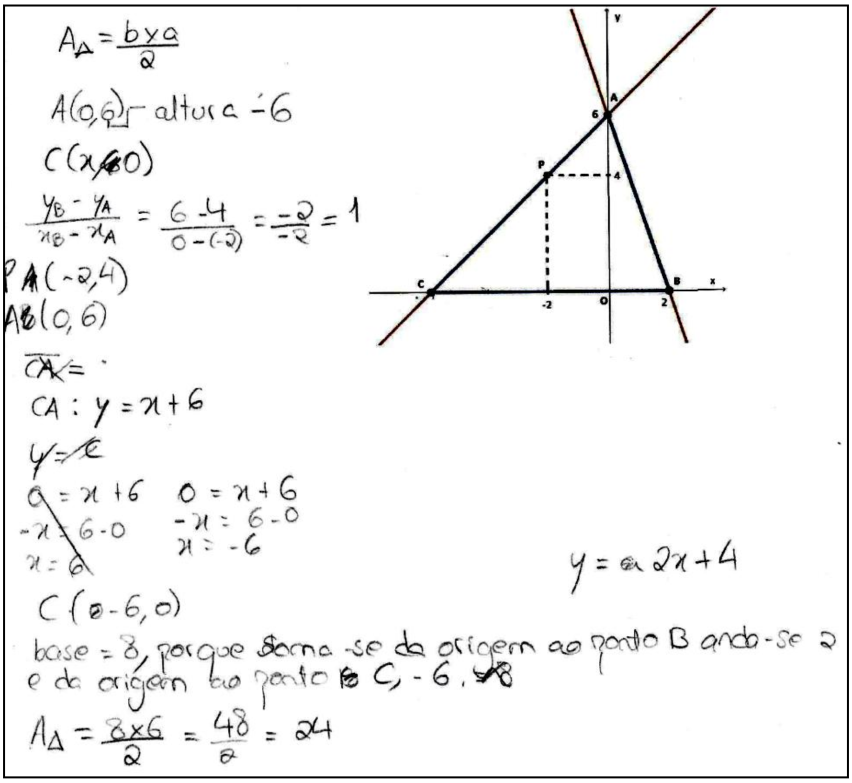


Figura 46 – Resolução da Soraia – problema 1 da entrevista

Em seguida analiso as resoluções do Ivan e da Soraia relativamente às fases de resolução de um problema (Pólya, 1957), apoiando-me nos dados recolhidos e na gravação áudio realizada.

Compreensão do problema

Ivan começou por fazer uma leitura voluntária do enunciado, em tom alto. Rapidamente os alunos identificaram o triângulo $[ABC]$ assim como indicaram que na figura estavam marcados quatro pontos $A, B, C\ e\ P$, entre os quais não conheciam as coordenadas do ponto C. Os alunos asseguraram ainda a necessidade de calcular a área do triângulo $[ABC]$.

Prof.ª Nicole: Conhecemos todos esses pontos?
Ivan e Soraia: Falta o C.
Prof.ª Nicole: Temos alguma informação sobre esse ponto?
Ivan: Fica no x [sobre o eixo das abcissas].
Soraia: E é negativa [referindo-se à abcissa de C]
(…)
Prof.ª Nicole: O que precisamos para saber a área de um triângulo?
Ivan: Pelo menos dois lados e um ângulo ou então dois ângulos… Não sei…
Prof.ª Nicole: A área. Vocês lembram-se?
Ivan e Soraia: Base vezes altura a dividir por dois.

A última temática relativa a triângulos que os alunos tinham trabalhado neste ano letivo foi Critérios de Semelhança de Triângulos. Deste modo, considero que a resposta do Ivan pode resultar de uma confusão com estes critérios, estudados no primeiro período, já que foram o último conteúdo trabalhado que implicava diretamente propriedades dos triângulos. Do meu ponto de vista, ao tentar recuperar o que foi trabalhado em sala de aula, o aluno poderá ter tentado associar os tópicos. Portanto, considero que foi apenas uma desatenção deste, baseando-me no trabalho que o aluno revela em sala de aula e por ter corrigido de imediato (e em uníssono) com a colega.

À parte deste aspeto, considero que os dois alunos compreenderam o problema sem demonstrar dificuldades significativas já que identificaram que cada um dos lados do triângulo está sobre uma reta, evidenciando-o diversas vezes, por gestos ou ao sublinhar a representação do enunciado. À semelhança do outro par, ao escrever a expressão geral do cálculo da área do triângulo, os alunos aperceberam-se das etapas a alcançar na resolução do problema, nomeadamente, ao evidenciar a necessidade de determinar a abcissa do ponto C para conhecer a base do triângulo.

O facto de se tratar de uma situação de entrevista foi também facilitador da compreensão do enunciado por parte do par de alunos pois, de certo modo, a professora insistia para que estes fossem justificando e registando todos os passos.

De destacar ainda que, nesta fase inicial os alunos desconsideraram as coordenadas do ponto P, bem como o facto de este ponto pertencer à reta AC.

Elaboração de um plano

Também neste par, embora trocassem ideias, cada um dos alunos fez o seu registo e optaram por usar letras distintas: o Ivan denotou a altura do triângulo por h (Figura 47) e a Soraia por a (Figura 48).

$$A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}$$

Figura 47 – Expressão para o cálculo da área de um triângulo indicada pelo Ivan

$$A_{\Delta} = \frac{b \times a}{2}$$

Figura 48 – Expressão para o cálculo da área de um triângulo escrito pela Soraia

Através de gestos sobre a representação do enunciado, os alunos frisaram que a base do triângulo $[ABC]$, que designaram por b, era o segmento de reta $[BC]$.

Ultrapassado o constrangimento inicial, quando os alunos demonstraram dificuldade ao exprimir a expressão geral do cálculo da área de um triângulo, o par de alunos deu alguma importância à medida do comprimento do lado $[AB]$, mas rapidamente percebeu que bastava considerar o valor seis como a altura do triângulo (já que indicaram seis como a ordenada do ponto A) e considerar $[CB]$ como a base do triângulo. Para tal, estes alunos reconheceram ser necessário determinar a abcissa do ponto C (por exemplo, como ilustra a Figura 45, o Ivan sublinhou por diversas vezes o ponto C na figura) e, questionados sobre como teriam de proceder para determinar o valor da abcissa de C, este aluno afirmou: "Temos que fazer uma equação (…) nós não temos o x mas temos o y! O y é zero".

Com estas palavras, Ivan referia-se aos dados disponíveis, já que como o ponto C pertence ao eixo das abcissas, a sua ordenada é zero e, por isso, afirma que "não temos o x mas temos o y" que é zero.

Execução do plano

Apesar da dificuldade na elaboração do plano, de um modo global, o par de alunos subdividiu este problema em dois, já que, para calcular a área do triângulo, precisavam conhecer a abcissa do ponto C. Deste modo, posso indicar que os alunos adotaram as estratégia de *segmentar o problema em etapas* (determinar as coordenadas do ponto C para depois calcular a área do triângulo [ABC]).

Os alunos iniciaram a execução do plano ao indicar corretamente a expressão para o cálculo da área do triângulo e considerar a ordenada do ponto A como altura do triângulo, concluindo ser seis. A figura seguinte apresenta a produção escrita do Ivan.

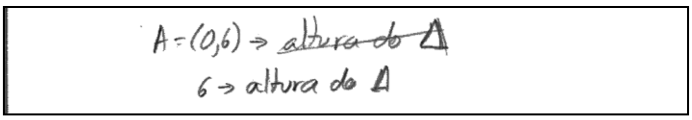


Figura 49 – Justificação da altura do triângulo, apresentada pelo Ivan

Ao longo desta resolução (Figura 49) noto que a altura do triângulo como a medida do comprimento do segmento $[OA]$ esteve sempre implícita, já que, os alunos entrevistados assumiram sempre a altura do triângulo $[ABC]$ como o valor da ordenada do ponto A.

Em seguida, os alunos identificaram as coordenadas do ponto C como sendo do tipo $(x, 0)$ e indicaram que precisavam conhecer a abcissa deste ponto para conseguir determinar a base do triângulo que, como refere Soraia, "É a distância do ponto C ao B". Ivan e Soraia, ao reconhecerem C como um ponto pertencente à reta AC, indicam que precisavam escrever uma equação da reta AC. Este par afirma ser possível escrever uma equação da reta AC porque conhecem a ordenada na origem e os pontos A e P permitem calcular o declive da reta:

> **Prof.ª Nicole**: Como podem fazer isso [calcular o declive da reta]?
> **Soraia**: Temos de ter dois pontos.
> **Ivan**: Temos o P e o A.
> **Soraia**: Temos o (0,6)… a ordenada na origem é seis.

Assim, os alunos concluíram ser necessário calcular o declive para escrever a equação da reta AC.

O cálculo do declive permitiu aos alunos escrever uma equação da reta AC, como a apresentada na figura 50.

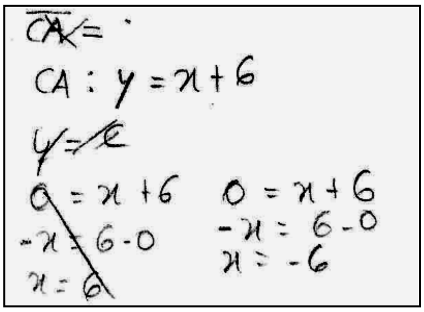


Figura 50 – Cálculo da abcissa do ponto C a partir da equação da reta AC, realizado pela Soraia

A figura 50 ilustra o método adotado pela Soraia e pelo Ivan, ao substituírem as coordenadas do ponto C na equação da reta AC, ainda que seja visível a dificuldade revelada pela Soraia na resolução de equações de primeiro grau com uma incógnita. Esta dificuldade foi superada por confronto com o ponto C assinalado na representação gráfica, pois, como referiu a aluna, "está na parte negativa" do eixo.

Com o objetivo de obter o valor da abcissa do ponto C os alunos apresentaram as justificações como nas figuras seguintes.

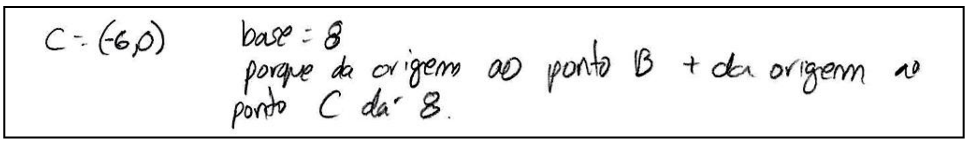


Figura 51 – Justificação da medida do comprimento da base do triângulo, apresentada pelo Ivan

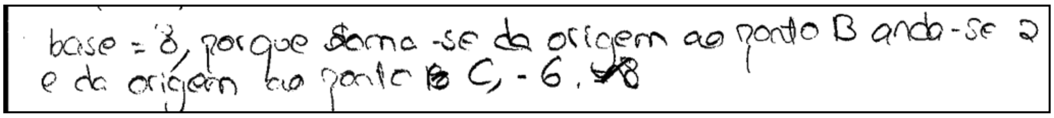

base = 8, porque soma-se da origem ao ponto B anda-se 2 e da origem ao ponto C, -6. 48

Figura 52 – Justificação da medida do comprimento da base do triângulo, apresentada pela Soraia

O Ivan (Figura 51) e a Soraia (Figura 52) justificaram a medida do comprimento da base do triângulo como a soma da medida do comprimento dos segmentos $[OC]$ e $[OB]$ – ao dividirem o segmento da base em dois mais pequenos.

Por fim, os alunos calcularam a área do triângulo $[ABC]$, tal como a Soraia (Figura 53).

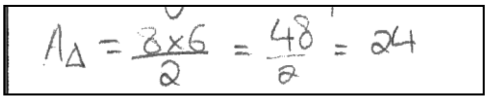
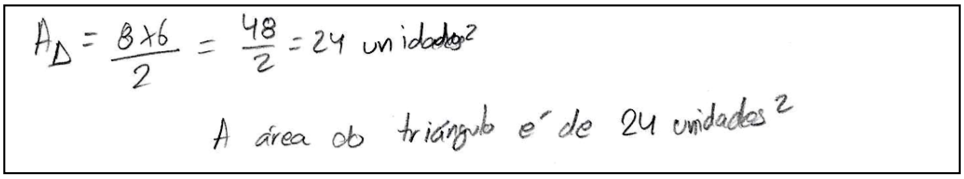

$A_\Delta = \frac{8\times6}{2} = \frac{48}{2} = 24$

Figura 53 – Cálculo da área do triângulo apresentado pela Soraia

Análise Retrospetiva

Da análise que realizo, parece-me que a análise retrospetiva ocorreu em duas fases na resolução deste problema, primeiramente, quando os alunos determinaram a abcissa do ponto C e foram confrontados com um valor negativo, já que, tal como a Soraia refere, o ponto "está na parte negativa" do eixo e, por fim, quando questionei o par Ivan e Soraia sobre em que unidades se apresentaria a resposta – após terem concluído a problema.

Destaco também que este par não sentiu necessidade de apresentar uma resposta ao problema, nem apresentar unidades, quer ao indicar a medida do comprimento da base do triângulo, como após calcularem a área do triângulo. A figura 54 surge com o objetivo de ilustrar o que Ivan acrescentou às suas produções escritas após questionar os alunos acerca da ausência de unidades, bem como, inexistência de resposta ao problema inicial.


$A_\Delta = \frac{8\times6}{2} = \frac{48}{2} = 24$ unidades^2

A área do triângulo é de 24 unidades^2

Figura 54 – Alterações às produções escritas do Ivan

Após concluírem a resolução do problema, questionei o par acerca das unidades em causa neste problema.

> **Ivan**: É centímetros?... Não, unidades!
> **Prof.ª Nicole**: Então [a resposta] é 24…
> **Ivan**: …unidades, ao quadrado.

Este questionamento levou ambos os alunos a acrescentarem uma resposta à sua resolução (Figura 45 e 46) e, no caso do Ivan (Figura 45), ainda acrescentou as unidades, explicando que, se considerasse metros, escreveria metros ao quadrado, pelo que, neste caso, expressa unidades ao quadrado.

Como durante a resolução deste problema os alunos não referiram a reta AC como gráfico de uma "função afim", achei que seria oportuno para questioná-los sobre esse assunto.

> **Prof.ª Nicole**: Se tivéssemos uma função cujo gráfico era esta reta [apontando para a reta], era uma função de que tipo?
> **Soraia e Ivan:** Afim!
> **Prof.ª Nicole**: Porquê meninos?
> **Soraia e Ivan:** Porque não passa na origem [do referencial].

Neste excerto é notório que os alunos mobilizam corretamente este conceito, ainda que não o tivessem explicitado espontaneamente no contexto deste problema.

Aspetos globais

O par Alberta e Piedade manifestou algumas dificuldades com a expressão geral para o cálculo do declive. No entanto, da análise realizada, as alunas parecem evidenciar compreensão, a nível gráfico, de declive positivo e de declive negativo, nomeadamente, quando referem que o declive da reta será positivo já que "a reta está virada para o lado positivo" ou "a subir" – isto, antes de calcularem o seu valor.

No caso particular da Soraia foram notórias algumas dificuldades ao nível do cálculo de expressões numéricas, nomeadamente no cálculo do declive, e na resolução da equação do primeiro grau com uma incógnita. As dificuldades evidenciadas por esta aluna são, de certo modo, representativas das demonstradas pelos alunos ao longo das aulas em que lecionei esta unidade. Assim, friso como, na resolução deste problema o trabalho colaborativo entre a Soraia e o Ivan permitiu ultrapassar alguns constrangimentos ao nível da destreza da Soraia no cálculo de expressões numéricas e resolução de equações, ainda que o Ivan tenha pretendido recorrer à calculadora para realizar o cálculo do declive – por estar a operar com valores negativos.

Nos dois pares, realço que os alunos recorreram à mesma notação para designar elementos diferentes, por exemplo, a para representar a medida do comprimento da altura do triângulo [ABC] e ainda como declive da reta AC, ou b, para designar a medida do comprimento da base do triângulo e para representar a ordenada na origem – na equação reduzida de uma reta. Quando questionados, os alunos, indicaram claramente a diferença entre estes elementos, tendo apenas evidenciado confusão pelas notações utilizadas quando os questionava relativamente ao b (da ordenada na origem) e associavam ao ponto B.

Posso assim afirmar que, em geral, numa primeira fase da resolução do problema, os alunos mobilizam os seus conhecimentos referentes ao cálculo da área de um triângulo e destaco a forma como dispuseram dos seus conhecimentos para determinar a abcissa do ponto C, que com facilidade reconheceram ser do tipo $(x, 0)$, por estar sobre o eixo das abcissas. Deste modo, e apesar de algumas das dificuldades que surgiram, penso que, de uma forma geral, os alunos reagiram bem a este problema que articula Álgebra e Geometria, e mobilizaram os conhecimentos trabalhados na subunidade "Gráficos de Funções Afins".

Resumidamente, os alunos revelaram conhecer a equação reduzida de uma reta, $y = ax + b$ e mostraram reconhecer a como declive da reta e b como ordenada na origem. Além disso, foi notório que os alunos declararam ser necessário conhecer dois pontos de uma reta para calcular analiticamente o seu declive, apesar de terem demonstrado bastantes dificuldades em enunciar a expressão para o cálculo analítico do declive e pouca facilidade no cálculo de expressões algébricas simples. A determinação da abcissa de um ponto, conhecida a equação da reta a que pertence foi outro fator de constrangimento para os alunos na resolução deste problema, ainda que tivessem sido críticos face ao valor negativo da abcissa, ao constatar que a medida do comprimento da base do triângulo inclui o comprimento do segmento de reta $[CO]$ e $[OE]$. Finalmente, destaco que ao longo da resolução do problema os alunos não evidenciaram sentir necessidade de utilizar unidades nem escreveram uma resposta final ao problema, o que pode indicar que, assim que os alunos alcançam uma estratégia para o resolver, esquecem-se da questão inicial.

Do meu ponto de vista, o contexto de entrevista foi facilitador à compreensão do enunciado, bem como à organização e explicitação das produções escritas dos alunos, nomeadamente, quando estes foram confrontados com a dificuldade, inesperada para mim, de não conseguirem indicar a expressão geral do cálculo da área de um triângulo. Isto é, a situação de entrevista propiciou um maior questionamento por parte das professoras, já que se solicitava aos alunos que fossem anotando os dados que considerassem pertinentes, o que pode ter contribuído favoravelmente para a interpretação e organização dos dados, na resolução deste problema.

Realço ainda que, em ambos os pares de alunos, o alcançar da referida expressão lhes permitiu estabelecer o plano de resolução pois sensibilizou-os para os dados em falta. Além disso, é ainda de sublinhar o modo como os alunos gesticulavam em torno da figura do enunciado, riscando e sublinhando, quer para justificar algum aspeto, como enquanto pensavam sobre a situação.

De um modo geral, em ambos os casos, os pares de alunos evidenciaram dificuldades em estabelecer o plano, no entanto, há que ter em conta que esta foi a primeira situação em que trabalharam uma equação de reta com o objetivo de obter dados para calcular a área de uma figura, tratando-se de um verdadeiro problema para eles.

Posto isto, apesar de o par Alberta e Piedade revelar uma maior mobilização de conhecimentos matemáticos antes de calcular analiticamente o declive, é de salientar que o Ivan e a Soraia foram mais eficazes porque tinham mais presente a expressão geral do cálculo analítico do declive – ainda que ambos os pares tivessem chegado ao valor pretendido do declive da reta. Adicionalmente, o par de alunas, desde o início da interpretação do problema mobiliza os conceitos “função afim” e “função linear”, enquanto o par Ivan e Soraia não recorreu, explicitamente, a esses conceitos durante a resolução do problema, apesar de quando questionados, associarem a representação gráfica a uma função afim por “não passar na origem do referencial”.

Para concluir, destaco que para a resolução deste problema os alunos recorreram às seguintes estratégias heurísticas: *segmentar o problema em etapas* e *utilizar representações e esquemas na resolução do problema*. Enquanto a primeira estratégia está presente nas diversas etapas em que os alunos subdividiram as suas resoluções (cálculo do declive, da ordenada na origem, expressão equação da reta e cálculo da área do triângulo), a segunda emerge quando Piedade recorre a um esquema para determinar a medida do comprimento de um lado do triângulo. Tanto estas estratégias heurísticas, como as principais noções mobilizadas pelos alunos na resolução deste problema, com a função afim, estão condensadas no Quadro 5. Saliento, para finalizar, que os dois pares de alunos optaram por não recorrer ao GeoGebra, durante a resolução deste problema.

Quadro 5 – Síntese das estratégias e conhecimentos mobilizados pelos alunos na resolução do problema 1 da Entrevista

Estratégias heurísticas	**Noções mobilizadas**
Sem recurso ao GeoGebra	Sem recurso ao GeoGebra
-Segmentar o problema em etapas - Utilizar representações e esquemas na resolução do problema	-Área de um triângulo - Interpretar representação gráfica de uma função -Calcular o declive -Equação reduzida de uma reta $y = ax + b$ - Determinar a abcissa de um ponto, conhecida uma equação da reta à qual este pertence.

5.5. Entrevista: Problema 2

O último problema presente nesta análise (Figura 55) diz respeito à segunda tarefa proposta na entrevista aos dois pares de alunos.

2. Seja f a função representada no referencial da figura seguinte.
Escreve a equação de uma reta concorrente ao gráfico da função f. Explica a tua resposta.

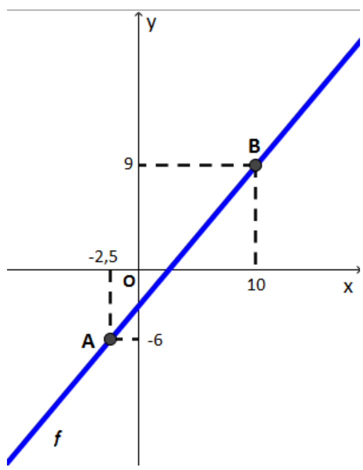


Figura 55 – Enunciado do problema 2 da Entrevista

O enunciado do problema (Figura 55) apresenta uma função f por meio da sua representação gráfica, na qual estão assinalados os pontos $A(-2{,}5;\ -6)$ e $B(10,\ 9)$, e pretende-se que os alunos escrevam a equação de uma reta concorrente à reta assinalada, que representa a função f. Trata-se assim de uma questão que tem uma infinidade de respostas, o que pode causar alguma dificuldade aos alunos.

Observar o modo como os alunos interpretam a representação gráfica de uma função e mobilizam os seus conhecimentos algébricos foi a minha principal intenção ao propor este problema aos alunos.

À semelhança do problema anterior, analiso os dados dos dois pares de alunos separadamente e, por fim, procuro articular os resultados de ambos. Recordo que, tal como no problema anterior, os alunos trabalharam a pares na resolução desta questão mas fizeram registos individuais.

5.5.1. Alberta e Piedade

As produções escritas das alunas Alberta e Piedade são apresentadas nas figuras 56 e 57, respetivamente. Nestas resoluções, ainda que individuais, observa-se que as alunas alcançaram uma mesma resposta, apesar de este problema ter múltiplas soluções, tendo também recorrido às mesmas notações. De um modo geral, indicam a expressão geral da equação reduzida de uma reta, escrevem os pontos A e B assinalados, calculam o declive e recorrem aos dados anteriores para determinar o valor da ordenada na origem, de forma a escreverem a equação da reta.

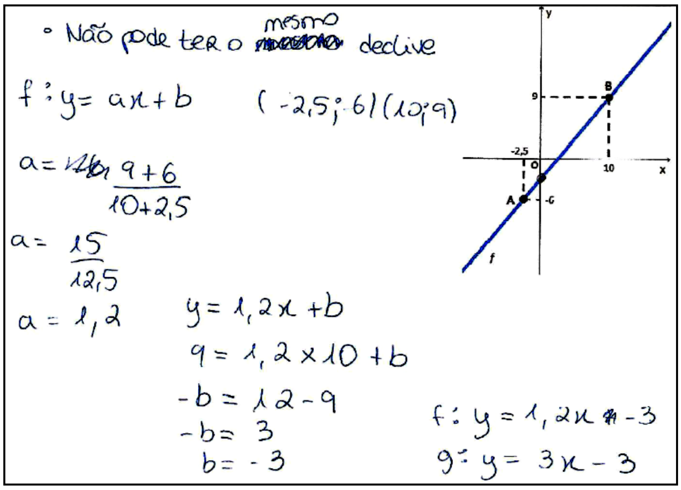


Figura 56 – Resolução da Alberta – problema 2 da entrevista

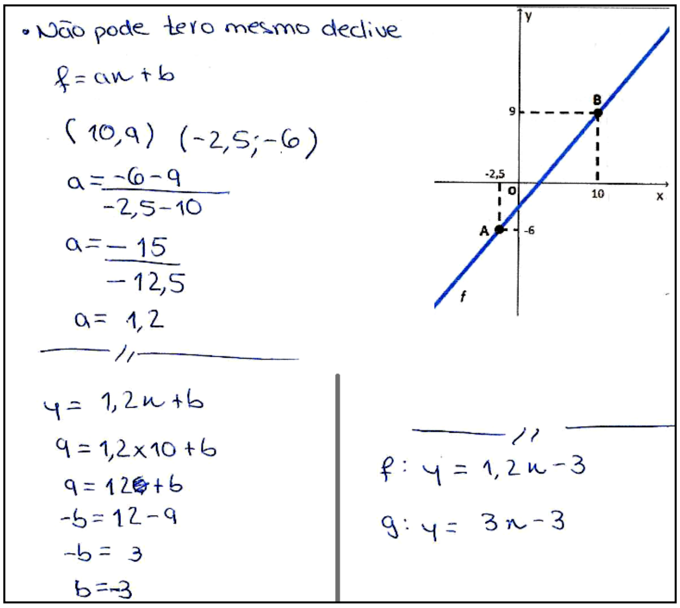


Figura 57 – Resolução da Piedade – problema 2 da entrevista

Seguidamente, apresento com mais detalhe as etapas das resoluções deste problema da Alberta e da Piedade – recorrendo aos elementos recolhidos na entrevista.

Compreensão do problema

Num tom alto e por sua iniciativa, a Piedade leu o enunciado do problema (Figura 55). De imediato afirmou:

> **Piedade**: Então… se é concorrente tem de ter um ponto em comum
> **Alberta**: Tem de ir passar num ponto.

Estas observações das alunas parecem realçar que estas traduziram o enunciado que estava em linguagem natural e deram-lhe uma interpretação gráfica, tendo manifestado compreensão de que teriam de determinar uma reta com um ponto comum com a reta desenhada.

Quanto à interpretação dos dados fornecidos pela representação gráfica da função f, as alunas identificam os aspetos essenciais desta representação ao reconhecer as coordenadas dos pontos A e B, ao identificar f como uma função afim e ao afirmar que o declive da reta é positivo – como ilustra o diálogo seguinte:

> **Prof.ª Inês**: Que dados conhecem desta reta aqui [aponta para a representação gráfica da função f].
> **Piedade**: O ponto A é $(-2{,}5;-6)$ e o ponto B é $(10{,}9)$.

> (A professora Inês sugere às alunas que anotem as coordenadas dos pontos)
> **Alberta:** Sabemos que é uma função afim!
> **Prof.ª Inês**: E quanto ao declive?
> **Alberta e Piedade:** É positivo.
> **Piedade**: ... a reta está a crescer.

Considero que as alunas revelaram compreensão do enunciado, tanto da parte apresentada em linguagem natural, como da representação gráfica, embora apoiadas pelo questionamento da professora Inês. Friso ainda que, novamente, as alunas associam corretamente o declive positivo com o crescimento da função, embora não o exprimam de uma forma totalmente correta. As alunas associam o declive positivo ao crescimento da reta ao invés de o associarem ao crescimento da função f cujo gráfico está representado no enunciado.

Elaboração de um plano

No seguimento do diálogo anterior, a Piedade continua o discurso, após uma breve pausa:

> **Piedade**: *Escreve a equação de uma reta concorrente* [repete num tom alto o enunciado]. Ah…não! Eu ia dizer que era paralela! Por isso não pode ter o mesmo declive [que a reta correspondente à representação gráfica da função f].
> (A professora Inês pede às alunas que registem esta constatação).

O discurso da Piedade parece indicar, ainda que possa não ser muito evidente, que o plano para a resolução do problema passava por indicar o declive de uma reta paralela à que é dada, naturalmente por se tratar da situação mais fácil para as alunas. Mas, logo de seguida, a aluna reconhece não ser essa a situação do problema e, por isso, necessitar de determinar uma equação de uma reta com um declive distinto da reta referente à função f.

Posteriormente, as alunas indicam que uma reta concorrente a f terá de ter o declive negativo. Perante essa afirmação sendo-lhes questionado:

> **Prof.ª Inês**: Conseguem arranjar alguma [reta] com declive positivo que seja concorrente?
> **Alberta e Piedade**: Podemos sim!
> **Piedade**: Se for assim [faz um gesto sobre o ponto e indica uma reta com declive positivo que interseta f no terceiro quadrante].

Segundo a minha interpretação, as alunas revelam aqui capacidade de pensar em várias hipóteses quanto aos resultados que poderão obter, já que concluíram que o declive de uma reta concorrente a f poderá ter declive positivo ou nulo. Neste caso, o questionamento poderá ter condicionado as estratégias das alunas, ao nível do desenvolvimento do seu plano, já que estas poderiam não ir diretamente a esta etapa na resolução do problema.

> **Prof.ª Inês**: Então e como podem continuar?
> **Alberta**: Acho que podemos calcular o declive!
> **Piedade**: Primeiro acho que é melhor escrever a equação desta reta [aponta para a representação gráfica da função f].

São agora mais evidentes e concretos os passos na resolução do problema que as alunas consideram necessários, ou seja, é claro o delinear da estratégia por parte de Alberta e Piedade. Ao centrar a minha atenção no que as alunas afirmam é possível sublinhar que enquanto a Alberta está mais focada no declive, a Piedade considera que precisa da equação da reta. Após a observação de Piedade, as alunas escreveram a expressão geral da equação reduzida de uma reta (Figuras 58 e 59).

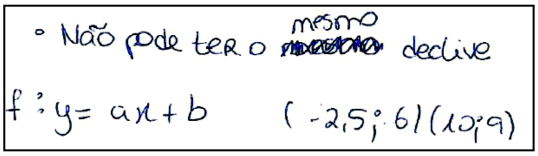


Figura 58 – Registo dos dados, realizado pela Alberta

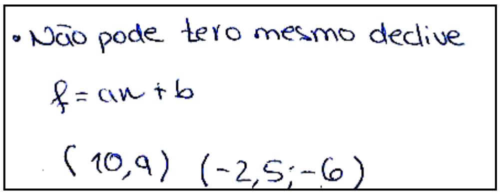


Figura 59 – Registo dos dados, realizado pela Piedade

Na figura 59, podemos observar um abuso de notação feito pela aluna, sem que, como é possível verificar (Figura 56) tivesse implicações impeditivas à restante resolução.

Execução do plano

Da análise dos dados, saliento que as alunas segmentaram este problema em quatro etapas: o cálculo do declive, o determinar da ordenada na origem, a escrever a equação da reta f e o indicar a equação da reta concorrente. Esta segmentação remete precisamente para a estratégia heurística de segmentar o problema que se pretende resolver.

Se na resolução do primeiro problema da entrevista estas alunas manifestaram dificuldade em identificar a expressão geral do cálculo analítico do declive de uma reta, na resolução deste problema o mesmo não se verificou. Penso que o breve esclarecimento dado pela professora no problema anterior, permitiu às alunas que recordassem esta expressão, e assim, para calcular o declive já não recorreram à expressão geral e indicaram logo a expressão concretizada com os valores dos pontos A e B (Figuras 60 e 61).

$$a = \frac{9+6}{10+2,5}$$
$$a = \frac{15}{12,5}$$
$$a = 1,2$$

Figura 60 – Cálculo do declive, realizado pela Alberta

$$a = \frac{-6-9}{-2,5-10}$$
$$a = \frac{-15}{-12,5}$$
$$a = 1,2$$

Figura 61 – Cálculo do declive, realizado pela Piedade

Enquanto calculavam o declive, Alberta fez ainda uma observação:

> **Alberta**: É mais fácil começar pelo B porque assim dá um sinal positivo e fica mais [fácil].

Ou seja, a Alberta evidenciou alguma destreza neste cálculo, contrariamente ao que fez na resolução do problema anterior, o que pode indicar a sua familiaridade com este tipo de cálculo. Para realizar a divisão final, ambas utilizaram a calculadora.

Em seguida as alunas reescreveram a equação da reta, substituindo o valor do declive e reconheceram de imediato ser necessário determinar a ordenada na origem, no entanto, mostraram insegurança ao tentar calcular o b.

(Após grande hesitação das alunas)
Prof.ª Inês: Como é que calculamos a ordenada na origem sabendo o declive e os pontos?
Piedade: Ah, substituímos!...Então agora escolhemos um destes pontos. Este aqui [ponto B] é mais fácil.
Piedade: Fica 120, não é?
Alberta: 12.

$$\boxed{\begin{array}{l} y = 1{,}2x + b \\ 9 = 1{,}2 \times 10 + b \\ 9 = 12 + b \\ -b = 12 - 9 \\ -b = 3 \\ b = -3 \end{array}}$$

Figura 62 – Cálculo da ordenada na origem realizado pela Piedade

As alunas optaram pelo ponto B para determinar a ordenada na origem, por uma questão de facilidade de cálculo, o que, quanto a mim, pode ser indiciador da tendência dos alunos de evitar cálculos com valores negativos e/ou números não inteiros. O diálogo e a figura 62 ilustram como as alunas determinaram o valor da ordenada na origem, escrevendo depois uma equação da reta f, tal como na figura 63.

$$\boxed{f: y = 1{,}2x - 3}$$

Figura 63 – Equação da reta ***f***, escrita pela Alberta

Após escreverem a equação da reta, a Piedade afirma que para obter uma equação de uma reta concorrente a essa basta substituir o declive por outro valor. As alunas optam por escolher três como declive da reta concorrente e mantêm o valor da ordenada na origem da primeira reta, designando a nova reta por g (Figura 64).

$$\boxed{g: y = 3x - 3}$$

Figura 64 – Equação de uma reta concorrente à reta ***f***, escrita pela Alberta

Análise Retrospetiva

Ao longo da resolução deste par, a análise retrospetiva esteve bem evidente quando as alunas constataram que o declive de uma reta concorrente poderia ser positivo ou negativo, embora influenciadas pelo questionamento da professora.

Após concluírem a resolução do problema, a professora Inês questionou as alunas, sobre o ponto onde as retas que indicaram seriam concorrentes. As alunas indicaram que, como as retas tinham a mesma ordenada na origem, cruzar-se-iam no ponto $(0, -3)$. Esta observação revela uma boa compreensão das expressões analíticas e da relação entre esse tipo de representação e a gráfica.

> **Prof.ª Inês**: Não poderiam ser concorrentes noutro ponto? (pausa) Se fosse uma reta vertical era concorrente?
> **Alberta**: Ah, sim… então poderíamos ter escolhido e era mais fácil…

Pelo questionamento da professora, as alunas reconhecem que poderiam ter indicado a equação de uma reta vertical e, do mesmo modo, teriam a equação de uma reta concorrente. A Alberta mostra compreender que essa teria sido uma resposta mais expedita ao problema.

Por fim, destaco que nenhuma das alunas deu uma resposta explícita final ao problema.

5.5.2. Ivan e Soraia

Na figura 65 apresento os registos do Ivan, já na figura 66 mostro a resolução da Soraia. Os alunos optaram por recorrer ao GeoGebra para resolver este problema (Figura 55), usando a folha do enunciado apenas para registar as conclusões resultantes da utilização do *software*.

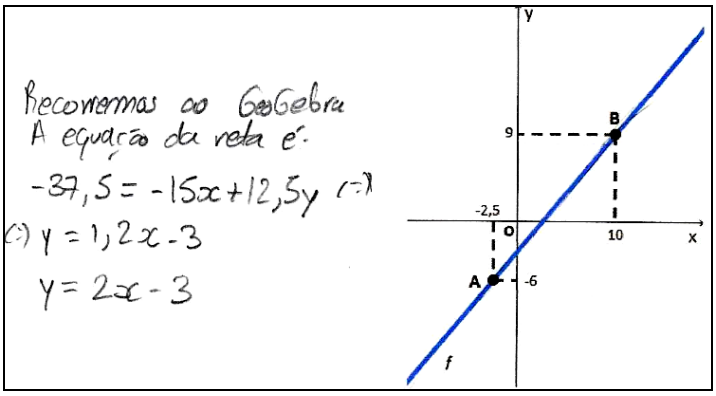


Figura 65 – Resolução do Ivan – problema 2 da entrevista

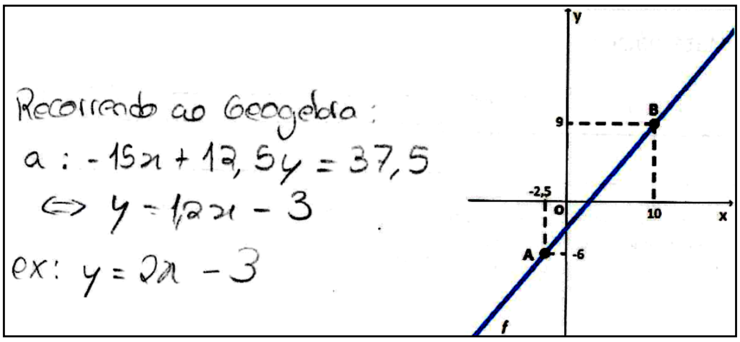


Figura 66 – Resolução da Soraia – problema 2 da entrevista

As etapas na resolução deste problema pelo Ivan e pela Soraia são apresentadas de seguida.

Compreensão do problema

Penso que este par não revelou qualquer dificuldade na compreensão do problema. O Ivan começou por ler alto o enunciado e, em seguida o par afirmou querer utilizar o GeoGebra.

> **Ivan**: Então agora é só pôr aí [no GeoGebra]…Temos dois pontos!
> **Prof.ª Nicole**: Têm dois pontos… E o que sabes com esses dois pontos?
> **Ivan**: Se unir esses dois pontos dá a função.
> **Prof.ª Nicole**: Queremos a função, Soraia?
> **Ivan**: Nós descobrimos qual é a equação desta reta e depois mudamos o declive.
> **Prof.ª Nicole**: Porque dizes que é necessário mudarmos o declive?
> **Ivan**: Porque…o declive…não é o declive…sim, sim, é o declive.
> **Soraia**: Ser concorrentes é sinónimo…
> **Ivan**: Porque quando o declive é diferente elas [as retas] são concorrentes.
> **Prof.ª Nicole**: Se o declive fosse igual o que acontecia [à posição relativa das retas]?
> **Ivan e Soraia**: Eram paralelas!
> **Ivan**: … ou coincidentes.

Deste diálogo e do à vontade dos alunos nesta situação interpreto que estes compreenderam de imediato o enunciado do problema. Por exemplo ao salientar os "dois pontos" e quando a Soraia diz "ser concorrentes é sinónimo", penso que, apesar de não ter terminado a afirmação, pretendia apoiar a ideia expressa pelo Ivan. Esta minha interpretação está relacionada com as respostas dos alunos às minhas questões seguintes, nomeadamente, quando questiono qual seria a posição relativa das retas se estas tivessem o mesmo declive e referem que as retas seriam paralelas ou coincidentes

– pelo que me parece implícito que compreendem o significado de concorrentes, paralelas e coincidentes.

Elaboração de um plano

Da análise do diálogo anterior é possível identificar claramente o plano dos alunos que, para além da utilização do *software* GeoGebra, indiciam a segmentação deste problema em duas etapas: determinar uma equação da reta correspondente à representação gráfica da função f e, em seguida, considerar um declive diferente. Esta estratégia é reforçada pelo Ivan:

> **Ivan**: Nós descobrimos qual é a equação desta reta e depois mudamos o declive.

Ainda que a Soraia tenha ficado quase em silêncio no estabelecimento do plano, durante a entrevista, e pelas suas atitudes e gestos, pareceu concordar com o Ivan.

Execução do plano

Desde a abordagem ao problema que os alunos expressaram a sua vontade em recorrer ao GeoGebra, por isso, pedi que deixassem expressa essa vontade nas suas produções escritas e que o registassem na folha de resolução (Figuras 65 e 66). No entanto, os alunos revelaram alguma dificuldade ao introduzir os pontos A e B no GeoGebra, pela linguagem característica deste programa.

O Ivan começou de imediato a introduzir os dados no computador mas obteve um vetor, por não utilizar a linguagem específica do GeoGebra. Como este *software* proporciona *feedback* automático os alunos rapidamente solicitaram esclarecimento, tentando evitar recorrer ao Guião do GeoGebra que lhes fora fornecido. Ultrapassados os primeiros constrangimentos, rapidamente uniram os pontos A e B e obtiveram através do recurso uma equação da reta, que eu sugeri que registassem na folha (Figura 67). O Ivan manifesta alguma estranheza relativamente à equação obtida: "É esta equação… estranha".

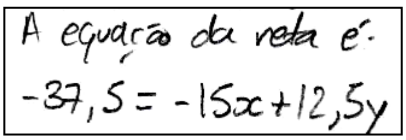


Figura 67 – Reprodução da equação obtida através do GeoGebra, realizada pelo Ivan

Após o comentário do aluno, questionei-os se conseguiriam identificar o declive dessa reta:

> **Ivan**: -15x, não é esse o declive?
> **Prof. ª Nicole:** Há pouco [no problema anterior] quando escreveram uma equação de uma reta, era deste tipo?
> (pausa)
> **Ivan**: Forma canónica…

O facto de o Ivan questionar se $-15x$ seria o declive da reta pode indicar, no meu entender, que o aluno possa associar o valor do declive exclusivamente ao valor que multiplica por x, independentemente de a equação da reta se encontrar, ou não, na forma reduzida. A "forma canónica" proferida pelo Ivan exemplifica a sua confusão com "equação reduzida" da reta. Após esta dificuldade inicial, os alunos aperceberam-se que precisavam da equação da reta na forma reduzida e referiram que se lembravam que era possível fazê-lo com o GeoGebra, solicitando a minha ajuda. Recorreram ao comando do GeoGebra e registaram nas suas folhas, como exemplifica a figura 68. Saliente-se que os alunos usaram o símbolo de equivalência entre as duas equações, o que pode denotar que compreenderam tratar-se de duas representações algébricas da mesma função.

$$a: -15x + 12,5y = 37,5$$
$$\Leftrightarrow y = 1,2x - 3$$

Figura 68 – Reprodução das equações obtidas através do GeoGebra, realizada pela Soraia

Tendo como objetivo tentar compreender como procederam os alunos, já que recorreram ao *software* GeoGebra, questionei-os:

> **Prof.ª Nicole**: Então e porque é que era importante termos uma equação desta reta? Já não me recordo…
> **Ivan**: Porque agora sabemos o declive que temos que mudar para serem retas concorrentes.
> (…)
> **Prof.ª Nicole**: Soraia, disseram-me que tinham de mudar o declive porquê?
> **Soraia**: Porque se elas tivessem o mesmo declive eram paralelas.
> **Ivan**: Por exemplo, $y = 2x - 3$.
> **Prof.ª Nicole**: A ordenada na origem pode ser a mesma? O que acham?
> **Soraia**: Que passam no y [interseta o eixo dos yy].

Após alterarem o declive na equação da reta, os alunos foram testar se a ordenada na origem da reta pretendida poderia ser a mesma, inserindo-a no GeoGebra.

Obtiveram um *output* como ilustrado pela figura 69, ficando convencidos de que tal seria possível.

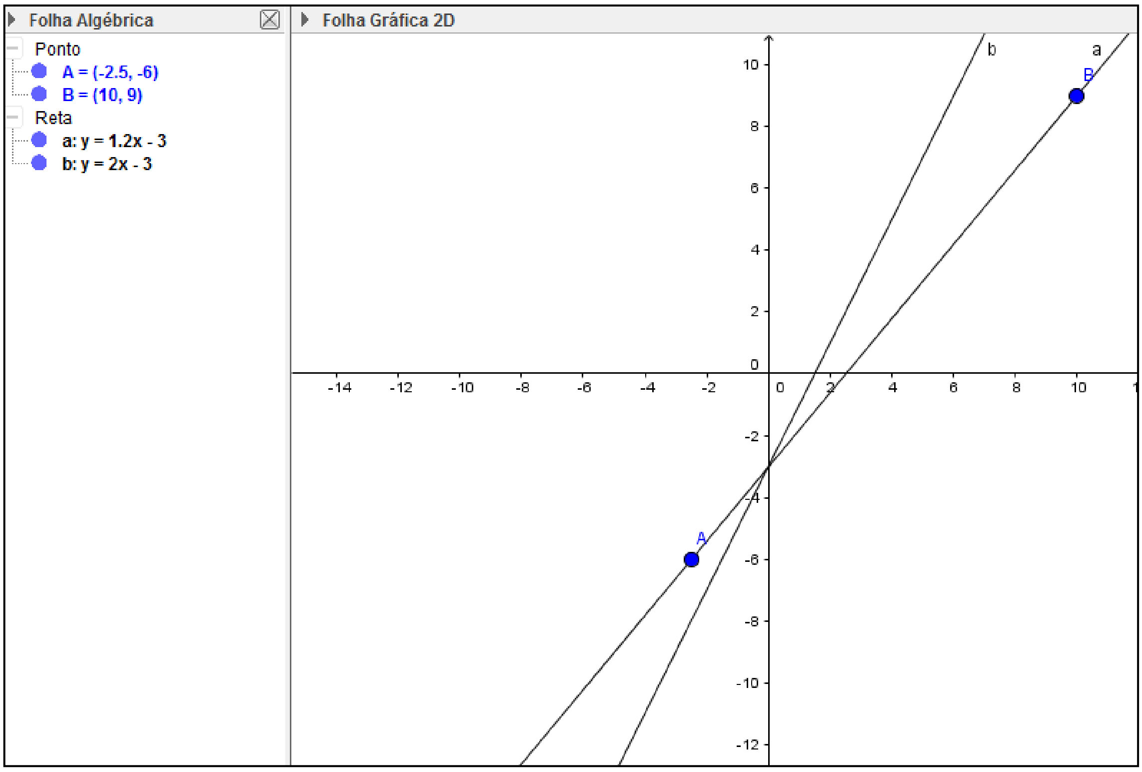


Figura 69 – *Output* que o par de alunos obteve através do GeoGebra

Análise Retrospetiva

Tal como na situação anterior, neste problema os alunos não apresentaram uma resposta final, ainda que a Soraia tenha escrito como na figura 70, frisando que a equação apresentada era apenas um exemplo, ou seja, uma das possibilidades de resposta ao problema.

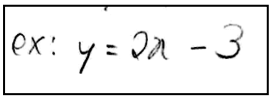


Figura 70 – Resposta ao problema 2 apresentado pela Soraia

Com o objetivo de perceber se teria ficado claro para os alunos de que haveria outras respostas possíveis, questionei-os:

> **Prof.ª Nicole:** E se [a ordenada na origem] não fosse [a mesma], as retas eram concorrentes?
> **Soraia**: Dava [intersetavam-se] mas mais abaixo.
> **Prof.ª Nicole:** Neste caso onde se intersetam?
> **Ivan**: No ponto -3.

É curioso analisar a afirmação da Soraia de onde se depreende que se as duas retas tivessem ordenada na origem distinta (com o igual valor do declive) intersetar-se-iam num ponto de ordenada inferior – desconsiderando os casos em que a ordenada na origem é superior a menos três. Apesar do que agora referi, este diálogo permite deduzir que os alunos compreendem que existem outras retas concorrentes à reta dada, ainda que não tenha sido imediata a associação do ponto onde as retas se cruzam com o valor da ordenada na origem das equações reduzidas das retas. Esta última observação apenas foi realizada pelo par de alunos após a minha chamada de atenção e pela visualização da folha algébrica do GeoGebra.

Questionei ainda o par de alunos quanto à possibilidade de uma reta concorrente à reta dada ser uma reta vertical ou horizontal, a que responderam positivamente.

> **Prof.ª Nicole:** Podem dar-me um exemplo?
> **Ivan**: (escreve no GeoGebra e fala em simultâneo) $y =$….
> **Soraia**: Pode ser um número qualquer!
> (…)
> **Prof.ª Nicole:** O que significa serem concorrentes?
> **Ivan**: Vão-se intersetar num ponto.

Esta discussão, posterior à resolução dos alunos, pareceu-me fundamental para perceber se é claro para os alunos que tanto uma reta vertical como uma horizontal podem ser concorrentes à reta dada. Neste caso foi necessário recorrer ao questionamento pois os alunos não mobilizaram os seus conhecimentos de forma espontânea, apesar das potencialidades gráficas do *software*.

Aspetos globais

O par Alberta e Piedade, ainda que manifestasse alguma insegurança na resolução do problema, mostrou mobilizar os seus conhecimentos referentes à posição relativa de duas retas. Em particular, no tema Gráficos de Funções Afins, estas alunas demonstraram algumas dificuldades em determinar a ordenada na origem de uma reta, conhecendo-se o seu declive e (pelo menos) um dos seus pontos, já que tentaram apoiar-se em trabalho realizado em sala de aula “antes do teste”. Em contrapartida, parece-me evidente que mobilizaram os seus conhecimentos referentes ao declive das retas e à respetiva posição relativa embora voltem a associar o declive positivo ao crescimento de uma reta e não da função. Apesar dos aspetos relatados, as alunas realizaram uma abordagem positiva ao problema, tendo mobilizado conhecimentos anteriores, nomeadamente ao associar as representações algébrica e gráfica de uma função. De referir que, num certo momento, o questionamento da entrevistadora pode ter condicionado a estratégia das alunas, condicionante que é, pois, um elemento a ter em consideração durante a prática letiva, já que é essencial dar espaço aos alunos para que desenvolvam as suas estratégias.

O GeoGebra foi uma ferramenta de trabalho escolhida pelo par Ivan e Soraia que mostraram uma rápida compreensão do problema, bem como a imediata estruturação de um plano. Apenas decidiram recorrer ao GeoGebra após lerem o enunciado, mas de imediato expuseram o seu plano, o que revela uma grande destreza ao nível da mobilização de conhecimentos e articulação de conceitos, o que não se verificou tanto na utilização do GeoGebra. Ainda que não verbalizassem muito, estiveram, ao longo da resolução deste problema, implícitos os conhecimentos mobilizados por estes alunos relativamente às características das equações de duas retas concorrentes e paralelas – não tendo sido muito explorado o caso da coincidência.

Num contexto tão particular como este, de entrevista, as intervenções da parte das professoras, podem ter desbloqueado o raciocínio dos alunos nalguns dos momentos da resolução, ainda que estas intervenções tenham sido cruciais para que os mesmos verbalizassem e explicitassem o modo como estavam a pensar.

Na resolução deste problema, a utilização do GeoGebra permitiu ao par de alunos liberta-se quer do cálculo do declive da reta, como da determinação da ordenada na origem – que revelaram ser um constrangimento para o outro par de alunos.

Comparativamente, o par que não recorreu ao GeoGebra mostrou maior dificuldade na mobilização de alguns conhecimentos, nomeadamente, ao determinar analiticamente o valor da ordenada na origem. No entanto, este par mostrou interpretar de um modo mais imediato o valor da ordenada na origem como sendo a ordenada do ponto onde as retas se intersetam, que o par que recorreu ao *software* de Geometria Dinâmica.

Relativamente às estratégias heurísticas a que os pares de alunos recorreram na resolução do problema, o *segmentar o problema em etapas* foi comum aos dois pares – ainda que o par que recorreu ao GeoGebra tenha segmentado menos o problema. O par Alberta e Piedade recorreu ainda a *questões ou procedimentos análogos* quando se deparou com a necessidade de determinar a ordenada na origem conhecendo o declive da reta e um dos seus pontos, constrangimento que não foram sentidos pela dupla que recorreu ao GeoGebra.

Recordo que na resolução do último problema analisado, um dos pares optou por recorrer ao GeoGebra, enquanto outro prescindiu deste recurso. No Quadro 6 surge um resumo das estratégias utilizadas e das noções mobilizadas por cada par de alunos, na resolução do segundo problema da entrevista.

Quadro 6 – Síntese das estratégias e conhecimentos mobilizados pelos alunos na resolução do problema 2 da Entrevista

Estratégias heurísticas		**Noções mobilizadas**	
Sem recurso ao GeoGebra	Com recurso ao GeoGebra	Sem recurso ao GeoGebra	Com recurso ao GeoGebra
-Questões ou procedimentos análogos -Segmentar o problema em etapas	-Segmentar o problema em etapas	- Interpretar representação gráfica de uma função -Calcular o declive - Equação reduzida de uma reta $y = ax + b$ - Relacionar o declive de retas concorrentes	- Interpretar representação gráfica de uma função - Equação reduzida de uma reta $y = ax + b$ - Relacionar o declive de retas concorrentes

Capítulo 6

Conclusões

No último capítulo deste trabalho começo por apresentar uma síntese do estudo realizado e, de seguida, o foco são as principais conclusões que obtive tendo por base a análise de dados realizada. Por fim, apresento uma secção dedicada a uma reflexão final, na qual, explicitarei a minha reflexão pessoal acerca da experiência ao longo do Mestrado e, em particular, da prática de ensino supervisionada.

6.1. Síntese do Estudo

Este trabalho de cariz investigativo tem como principal objetivo compreender de que modo alunos do 8.º ano de escolaridade resolvem problemas com a função afim, em particular em dois contextos, com e sem o recurso ao *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra. Para orientar este estudo formulei as seguintes questões de estudo:

- A que estratégias e representações recorrem os alunos na resolução de problemas com a função afim, nos dois contextos?
- Que conhecimentos matemáticos mobilizam os alunos, nos dois contextos?

A prática letiva supervisionada decorreu com uma turma do 8.º ano de escolaridade da Escola Secundária de Caneças e centrou-se na lecionação da subunidade "Gráficos de Funções Afins", que teve início no terceiro período escolar, ao longo de 18 tempos de 45 minutos.

Importa também referir que, para o desenvolvimento deste estudo, e com o objetivo de dar resposta às questões formuladas, recolhi dados em todas as aulas que lecionei através dos seguintes instrumentos de recolha de dados: as produções escritas dos alunos, a observação participante, a gravação áudio/vídeo, o diário de bordo e o programa *AutoScreenRecorder*. Todos estes elementos foram reunidos e cruzados na análise dos dados, na qual dei foco às fases de resolução de problemas mencionadas por Pólya (1957) e atendi à identificação de estratégias heurísticas utilizadas e conhecimentos mobilizados pelos alunos, na resolução dos cinco problemas que analisei.

6.2. Principais conclusões do Estudo

Ao longo da realização deste estudo, para além de reunir os esforços para que os alunos realizassem aprendizagens significativas, tentei compreender de que modo resolvem problemas com a função afim. Apoiando-me na análise dos dados que realizei, juntamente com as leituras que fiz e a permanente reflexão sobre todo este processo, tenho como objetivo dar resposta às questões de investigação que formulei.

A que estratégias e representações recorrem os alunos na resolução de problemas com a função afim, nos dois contextos?

Para começar, penso que é de extrema importância referir que, desde logo, a observação participante me permitiu perceber que estes alunos não estão muito familiarizados com a resolução de problemas, no contexto de sala de aula de Matemática. Deste modo, geralmente, os alunos revelaram alguma insegurança num primeiro impacto com os problemas propostos. Em contrapartida, apesar de nem sempre desenvolverem trabalho a pares, no decorrer das aulas lecionadas, penso que, em geral, os alunos estiveram envolvidos nas tarefas de sala de aula, em particular na resolução dos problemas propostos

Globalmente, com a análise das produções escritas é evidente que os alunos apresentam distintos graus de compreensão dos problemas consoante as representações de funções afins apresentadas no enunciado. Estes níveis de interpretação e compreensão refletem-se na elaboração do plano para a resolução do problema, que é mais demorada. A representação tabular, no contexto dos problemas com a função afim, foi a que representou maior dificuldade de compreensão para os alunos, como pude perceber pelos dados da resolução do primeiro problema analisado.

Na resolução dos problemas analisados é evidente que as estratégias heurísticas a que os alunos mais recorrem são *i) segmentar o problema em etapas* e *ii) utilizar representações e esquemas na resolução do problema*.

A estratégia *segmentar o problema em etapas* está presente na resolução dos quatro últimos problemas. Da análise de dados realizada posso conjeturar que os alunos que recorreram ao *software* GeoGebra segmentaram o problema em menos etapas – como é o caso do último problema analisado

O *utilizar representações e esquemas na resolução do problema* mostrou ser, simultaneamente, das estratégias mais utilizadas, salvo no segundo problema analisado (o do paralelogramo – Figura 22), no qual o próprio enunciado representava graficamente as funções envolvidas no problema. Penso que foi notório, ao logo da análise de dados que realizei, a tendência que os alunos manifestaram em representar graficamente as funções afins. Em particular, destaco que, na resolução do terceiro problema analisado (Figura 30), um número expressivo de alunos adotou a estratégia da representação para compreender o problema.

Para além das principais estratégias adotadas pelos alunos, outras estratégias ocorrem, maioritariamente nas diversas etapas (mais propriamente, na execução do plano) em que os alunos subdividem os problemas, para interpretar e explorar as representações ou esquemas que utilizam na resolução do problema. Acrescentando às duas estratégias na resolução de problemas já mencionadas, a *interpretação dos dados*, o *cálculo*, *introduzir valores auxiliares no problema*, *identificar um padrão*, *realizar esquemas* e *recorrer a questões ou procedimentos análogos* foram as outras heurísticas evidenciadas pelos alunos na resolução dos cinco problemas. Parece-me também relevante destacar que os alunos, na resolução de problemas, mostraram dedicar alguns esforços no sentido de organizar e esquematizar a informação do enunciado. Esta tendência foi mais acentuada no contexto de entrevista já que, durante a realização da mesma, as professoras sugeriram que os alunos fossem registando todos os aspetos.

Com base na análise efetuada, tendo também a afirmar que os alunos mostraram evolução positiva no modo como abordavam os problemas no início e no fim das aulas por mim lecionadas. Ao longo da unidade de ensino notei que os alunos se mostravam intrigados em como resolver o problema, ainda que, no problema do paralelogramo alguns alunos abandonassem a resolução antes de alcançar uma resposta. Um justificação que encontro para a não resolução deste problema, por parte de alguns alunos, não está diretamente relacionada com o tipo de tarefa que lhes foi apresentada, mas sim, com o facto de, numa das etapas da resolução do problema, os alunos precisarem dispor de conteúdos que não tinham sido diretamente trabalhados – aqui refiro-me ao cálculo da ordenada na origem, conhecida uma expressão geral da equação da reta e um ponto da mesma.

Uma das peculiaridades do trabalho que desenvolvi foi precisamente a utilização de um recurso tecnológico na resolução de problemas com a função afim. Fundamentando-me nas aulas lecionadas e nos problemas propostos aos alunos posso referir que nem sempre recorreram ao *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra. Tal como mencionado, com exceção de dois problemas em que não poderiam recorrer ao GeoGebra, ficou ao critério dos alunos a utilização deste programa.

Relativamente à utilização deste recurso como estratégia na resolução de problemas foi evidente que, nos três problemas analisados (Capítulo 5) em que os alunos poderiam optar por utilizar o *software* GeoGebra, nem sempre o fizeram. Do meu ponto de vista, esta opção pode estar relacionada com o facto de a utilização deste recurso em sala de aula de Matemática representar uma novidade para os alunos, ou ainda, parece-me estar muito relacionada com a perspetiva de que não será um instrumento possível de ser utilizado num momento de avaliação sumativa, pelo que pode ter sido um pouco desconsiderado pelos alunos.

Numa tentativa de estabelecer uma comparação entre as estratégias heurísticas utilizadas pelos alunos, na resolução de problemas com a função afim, quando utilizaram o GeoGebra ou quando preferiram não tirar partido deste recurso, parece-me evidente que as estratégias a que recorreram quando não utilizaram o *software* são mais demoradas, nomeadamente, no primeiro e no último problema analisados.

Nos problemas em que os alunos podiam optar por recorrer ao GeoGebra, foi evidente que recorreram a estratégias menos exaustivas do que quando não tiravam partido deste recurso, por diversos motivos. Primeiramente, a análise dos dados recolhidos leva-me a conjeturar que sempre que os alunos recorreram ao *software* mobilizavam os conceitos matemáticos envolvidos de forma mais pronta. Depois porque, o facto de o GeoGebra possibilitar uma visualização gráfica e algébrica, permite aos alunos colmatar as suas dificuldades na interpretação de alguma destas representações, com a interpretação da outra (Ponte & Canavarro, 1997). Além disso, o GeoGebra permite obter um *feedback* imediato, o que viabiliza o rápido teste das conjeturas dos alunos – como referem Daher e Anabousy (2015).

Gostaria ainda de dar destaque a um resultado que parece surgir neste estudo, que se relaciona com a conexão entre as estratégias utilizadas e a etapa na resolução de problema em estas ocorrem. Atendendo à análise de dados que realizei, parece-me evidente que as estratégias e a etapa na resolução de problemas onde estas sucedem estão, de alguma forma, relacionadas. O meu estudo leva-me a conjeturar que as estratégias como *segmentar o problema em etapas* e *utilizar representações e esquemas na resolução do problema* tendem a ocorrer numa etapa mais inicial da resolução de problemas, nomeadamente, no estabelecimento do plano; enquanto, as outras estratégias enumeradas fazem-se notar em fases da resolução de problemas como a execução do plano e análise retrospetiva. Além disto, ao debruçar-me sobre os dados recolhidos, é bastante evidente que as representações privilegiadas da função afim, na resolução de problemas, foram a gráfica e a algébrica.

Apesar das limitações temporais deste estudo, de algum modo, noto evolução positiva nas estratégias utilizadas pelos alunos, na resolução de problemas com a função afim. Creio que o GeoGebra permitiu aos alunos adquirir mais confiança pois penso que este possa ter sido um apoio para os alunos com mais dificuldades, por uma questão de motivação e adesão à própria tarefa, independentemente, de terem ou não sucesso na sua resolução.

A utilização deste *software* proporcionou, também, uma maior autonomia aos alunos e promoveu a interação e discussão das representações obtidas, entre os pares de alunos. Friso ainda que, embora os pares de alunos desta turma não trabalhem colaborativamente, foi interessante observar que esta tendência se invertia quando recorriam ao GeoGebra. Assim, indo ao encontro do que Granbeg e Olsen (2015) referem, a utilização do *software* parece estimular a cooperação na resolução de problemas.

Da minha observação em sala de aula e de alguns segmentos de vídeo analisados, posso sublinhar que este recurso foi um importante instrumento nos segmentos de discussão, já que proporcionou aos alunos representações cruciais para que ocorresse o processo de análise retrospetiva. Este processo de análise retrospetiva, facilitada pelo recurso ao *software*, para além de ser importante para os alunos validarem a sua respostas e realizarem eventuais extensões do problema, pode ser essencial para que alunos com mais dificuldades ampliem a sua compreensão do problema (Pólya, 1957).

Na perspetiva de Schoenfeld (1985), a perceção tem um forte efeito no desempenho na resolução de um problema. Este autor sublinha que, quando um individuo tem uma perceção correta dos aspetos essenciais de um problema, pode ter acesso a esquemas que são proveitosos e de onde podem advir métodos mais simples para a resolução do problema. Assim, atendendo à análise de dados que realizei, parece-me evidente afirmar que os alunos que, espontaneamente, tiveram uma perceção relacionada com a representação gráfica de uma função, recorreram a estratégias intermédias mais eficientes que os alunos que não privilegiaram a perceção gráfica. Esta conclusão permite-me depreender que, possivelmente, os alunos que apresentam maior predisposição para fazer a conversão de uma representação algébrica para uma gráfica, apresentam um grau mais elevado de apropriação do conceito de função. Este domínio das distintas representações de uma função parece corroborar os estudos de Carraher, Martinez e Schliemann (2008, citados por Ayalon, Watson, & Lerman, 2015), Consciência (2013) e Ronda (2015), que apoiam a existência de uma conexão entre o conhecimento de diversas representações de uma função e o grau de apropriação deste conceito.

Que conhecimentos matemáticos mobilizam os alunos, nos dois contextos?

Segundo PMCEB (MEC, 2013) o tópico "Gráficos de Funções Afins" é estudado no domínio das Funções, Sequências e Sucessões do 8.º ano de escolaridade. Para este nível, perspetiva-se que sejam trabalhados diversos conceitos, tal como mencionei no Capítulo 3 deste trabalho, que estão relacionados, de forma resumida, com a equação da reta vertical e não vertical, o gráfico de uma função linear ou afim, o declive e a ordenada na origem de uma reta não vertical, a relação entre paralelismo e declive e a determinação do declive de uma reta. Em consonância com a referência do PMCEB à resolução de problemas com a função afim, foi meu objetivo integrar, na planificação desta unidade de ensino, esta atividade com os alunos.

Quanto a mim, se o ensino e aprendizagem da Matemática integrarem na sua dinâmica habitual a resolução de problemas proporcionará aos alunos aprendizagens mais significativas, bem como, facilitará o despoletar do gosto dos alunos por esta disciplina e fomentará a criação de estratégias mais sofisticadas e eficazes na resolução de problemas com que os alunos se deparem.

Da análise realizada às resoluções dos alunos e aos restantes instrumentos de recolha de dados, é evidente que no primeiro problema analisado é de assinalar que um número significativo de alunos mostrou, automaticamente, interpretar uma representação tabular como uma função de proporcionalidade direta. Além disso, os alunos evidenciaram alguma hesitação no confronto de duas funções que são apresentadas com representações distintas (tabular e algébrica). Ainda no primeiro problema analisado, saliento a naturalidade com que os alunos encaram a conversão da representação algébrica em gráfica, o que não ocorreu entre a representação tabular e qualquer outra. Comparativamente, os alunos que recorreram ao GeoGebra revelaram uma correta interpretação gráfica e os alunos que optaram por não usar este recurso, em geral, mostraram dominar a notação algébrica. Em ambos os casos é de destacar que os alunos calcularam imagens, dados os objetos de forma ágil, o que contraria a tendência dos mesmos no início do estudo desta unidade de ensino e revela, portanto, ser uma aprendizagem consolidada pela maioria dos alunos da turma. Para os alunos que recorreram ao *software* sublinho que ainda mostram alguma dificuldade em interpretar os pontos da representação gráfica no contexto do problema.

Com a análise às respostas a esta questão permito-me também concluir que, nesta fase, alguns alunos não compreendem como, numa função afim, o coeficiente de x não pode ser desconsiderado e atender-se apenas ao termo independente (no caso do problema, o custo fixo do capacete) para comparar duas funções afins.

Já a análise às resoluções do segundo problema, no qual os alunos teriam de interpretar a representação gráfica com a forma de um paralelogramo sem recorrer ao GeoGebra, estes pareceram mobilizar os seus conhecimentos referentes às propriedades de um paralelogramo e, por isso, assumo que a articulação da Álgebra com outro tema Matemático tenha sido bem conseguida. Na resolução deste problema foi também evidente que os alunos reconhecem retas paralelas, como retas que têm o mesmo declive mas que ainda revelam dificuldades em enunciar a expressão geral para o cálculo analítico do declive. Adicionalmente, embora os alunos revelem associar a reta horizontal à função constante, destaco a necessidade que mostram sentir em atribuir, de algum modo, um valor à constante da equação da reta AB, desconsiderando o facto de esse valor poder variar. Um aspeto essencial na análise a este problema foi o ruído provocado pela determinação da ordenada na origem de uma reta, recorrendo a um outro ponto da reta, o que foi muito problemático, sobretudo, porque os alunos ainda não tinham objetivamente trabalhado este procedimento. Em todo o caso, penso que esta situação foi agravada porque os alunos revelam dificuldade em considerar que ao substituir as coordenadas de um ponto numa equação da reta a que este pertença, obtemos uma igualdade verdadeira.

Na análise ao terceiro problema, os alunos recorreram a conhecimentos matemáticos como a conversão de representação natural em representação gráfica e evidenciaram relacionar, novamente, o declive de duas retas paralelas com a igualdade do valor do seu declive. Do meu ponto de vista, com base na análise realizada, a necessidade que alguns alunos sentiram em esboçar o gráfico pode estar relacionada com a dificuldade em visualizar, não uma reta paralela, mas uma reta paralela que passe num determinado ponto. Contrariamente ao primeiro problema analisado, na resolução deste os alunos mostraram ter assimilado que a representação gráfica de uma função pode ser obtida a partir de dois pontos da reta. Um dos fatores que pode, na minha opinião, ter sido decisivo para esta perceção dos alunos, foi o trabalhar em sala de aula que uma reta pode ser determinada unicamente por dois pontos. Novamente, destaco a facilidade que os alunos mostraram em converter o enunciado para uma representação gráfica e, além disso a agilidade com que enunciam a equação reduzida de uma reta, $y = ax + b$, associando corretamente a e b aos valores do declive e da ordenada na origem. Os dados agora retratados levam-me a reconhecer que, tal como Ronda (2015) e Consciência (2013) destacam, que é fundamental comparar propriedades nas diversas representações, pois é ao reconhecer essas características que é possível alcançar um maior grau de compreensão da noção de função.

Naturalmente, considero que o contexto de entrevista facilitou a obtenção de algumas justificações e o contacto direto com os diálogos, certezas e inseguranças dos alunos no processo de resolução de um problema – ainda que o contexto de entrevista não permita ter uma consciência mais global da turma. No primeiro problema proposto aos pares de alunos neste contexto, nenhum par optou por recorrer ao *software,* o que parece ser indicador de um maior investimento temporal, por parte dos alunos, no cálculo. Precisamente para indicar a expressão geral para o cálculo da área de um triângulo, os alunos revelaram algumas dificuldades, embora considerassem imprescindível recorrer a essa expressão. Igualmente surgiram dificuldades ao indicar a expressão geral para o cálculo do declive, não tendo os pares de alunos evidenciado qualquer constrangimento no cálculo da expressão numérica que daí resultou. Paralelamente, os alunos revelaram boa interpretação da representação gráfica do enunciado, associando a reta AC a uma equação do tipo $y = ax + b$, em que seis é o valor da ordenada na origem.

Contrariamente aos outros problemas analisados, nestas resoluções os alunos apresentaram evidências de reconhecer o ponto C como um ponto da reta AC, pelo que, apontaram ser necessário começar por indicar uma equação da mesma reta para determinar a abcissa deste ponto – o que revela, quanto a mim uma evolução na compreensão da relação entre a equação de uma reta e as coordenadas dum ponto desta reta.

Nas resoluções do último problema analisado, o segundo problema da entrevista, um dos pares optou por recorrer ao GeoGebra. Para a resolução desta questão ambos os pares relacionaram que o declive de duas retas concorrentes não poderiam ser iguais e revelaram ser necessário determinar o declive da reta AB. Agora, enquanto o par que recorreu ao GeoGebra, Ivan e Soaria, obteve o valor do declive através deste recurso, o par Alberta e Piedade calculou-o através da expressão geral para o cálculo do declive e, determinou ainda a ordenada na origem da reta, recorrendo a um outro ponto da mesma.

Assim sendo, na resolução dos problemas analisados, os alunos evidenciaram alguns conhecimentos matemáticos aos quais recorrem, ainda que, por vezes, adaptem incorretamente uma "regra" para resolver um novo problema (Schoenfeld, 1985), como é o caso da expressão geral para o cálculo do declive.

Ainda que não seja muito evidente pelos dados apresentados, da experiência em sala de aula, considero que a generalidade dos alunos associa o valor do declive da reta a uma maior ou menor inclinação da reta, relativamente ao semieixo positivo das abcissas. Para além disto, os alunos mostraram estabelecer a relação entre uma função afim e o seu gráfico, sobretudo, ao evidenciarem que o gráfico de uma função afim é uma reta que não passa na origem do referencial e que, o gráfico de uma função linear é uma reta que passa no $(0{,}0)$. Adicionalmente, e sobretudo no problema do paralelogramo, penso que é de destacar que os alunos encaram o gráfico de uma função constante a uma reta horizontal.

Independentemente dos conceitos matemáticos a que recorrem, penso que a análise dos dados que realizei dá destaque à tendência dos alunos em converter a representação inicial da função para uma representação gráfica e ao identificar a equação reduzida de uma reta (não vertical) como $y = ax + b$, em que a é o declive e b a ordenada na origem.

Contrariamente às conclusões do estudo de Preston e Garner (2003), Friendland e Tabach (2001), estes alunos, em geral, não manifestaram dificuldades ao nível da interpretação do domínio de uma função – com exceção das primeiras tarefas trabalhadas em sala de aula.

Quanto ao recurso tecnológico utilizado na resolução de alguns dos problemas, evidencio que, naqueles em que os alunos podiam optar por recorrer ao GeoGebra, revelaram maior destreza na mobilização dos conceitos, no sentido em que utilizaram o *software* para obter dados que sabiam ser necessários para avançar na resolução. Por outro lado, sempre que os alunos não recorreram ao GeoGebra as suas resoluções foram mais demoradas pelos cálculos envolvidos (do declive ou da ordenada na origem), apesar dos conceitos mobilizados, de uma forma geral, serem os mesmos. Posto isto, o *software* GeoGebra parece ter sido importante como recurso na resolução dos problemas, não só pela importância que os alunos atribuem à representação gráfica como, no caso de ser necessário obter uma expressão algébrica, permitir centrar a sua atenção na articulação dos conceitos e não tanto em procedimentos de cálculo.

Precisamente, o facto de o GeoGebra permitir descentrar a atenção dos alunos do cálculo pode ser apontado como uma limitação deste recurso, ainda que saibamos que a sua utilização em sala de aula possa beneficiar ou dar oportunidade a alunos que tenham mais dificuldades no cálculo, para que obtenham conclusões que de outro modo lhes seria mais difícil alcançar. Além disso, este *software* mostrou ser importante nos momentos de discussão, permitindo aperfeiçoar conjeturas (Daher & Anabousy, 2015) relativamente às características das representações de uma função.

De facto, é de salientar que após a análise e reflexão sobre os dados, concluo que não existe uma linearidade nos conceitos mobilizados pelos alunos e, além disso, existem situações em que os alunos mobilizam adequadamente os conceitos (nomeadamente os relacionados com a função afim), e outras não. É sem dúvida de destacar que houve uma evolução positiva, sobretudo, na mobilização das noções relacionadas com a representação algébrica e gráfica de uma função afim.

Para além dos aspetos já referidos, penso que será importante assumir que poderia ter explorado mais, na resolução de problemas, a relação entre um ponto pertencer a uma reta e a sua interpretação, face ao contexto do problema. Ainda assim, considerando as dificuldades que os alunos revelaram no início do estudo deste tópico parece-me evidente que existe uma evolução bastante positiva nas suas aprendizagens, nomeadamente, na apropriação de conceitos mais elementares do tópico funções, cálculo de objetos e imagens e, quer na identificação do tipo de expressão algébrica, dado outro tipo de representação, como na conversão entre estas representações. Quanto à resolução de problemas destaco que, ao nível da mobilização de conceitos existiu também um progresso, dado que os alunos foram cada vez mais autónomos na sua resolução.

6.3. Reflexão final

A realização deste trabalho de cariz investigativo resulta da primeira unidade de ensino que lecionei na íntegra, da realização de um sonho de infância. Se, por um lado, este estudo reforça o culminar de um ciclo de muitas aprendizagens e de permanentes desafios, é, por outro, o ponto de partida para desafios ainda maiores. Refleti muitas vezes se, de facto, este mestrado para ser professora de Matemática, seria o meu caminho – ou se seria apenas teimosia ou loucura, como, por vezes, diziam as pessoas com que me cruzava. O trajeto até cá chegar teve alguns obstáculos mas não me arrependo nem um pouco de ter decidido prosseguir com o meu sonho.

Passando do sonho para a realidade, de facto, nestes dois anos descobri que "ser professora" é muito mais para além daquilo que sempre idealizei: muito mais trabalho, muito mais responsabilidade, muito mais dedicação, muito mais gratificante.

Tinha consciência da complexidade do papel do professor na escola, em particular, na sala de aula, mas hoje tenho uma perspetiva diferente do que é ser professor e, principalmente, tenho uma visão diferente do trabalho em sala de aula que pode promover aprendizagens mais significativas nos alunos.

Ao longo do Mestrado, em particular neste último ano, percebi a importância do trabalho colaborativo: a importância de reunir esforços para um fim, de partilhar opiniões e saber também ouvi-las, de ceder, de aceitar ou de contra-argumentar. Sim, contrariamente a todo o meu percurso escolar, vi-me confrontada com a necessidade de trabalhar em grupo e, por experiência própria, apercebi-me das vantagens deste tipo de prática enquanto aluna do Mestrado. Deste modo, apenas poderia perspetivar que os alunos trabalhassem a pares ou em pequenos grupos na sala de aula. No entanto, esta minha perspetiva não se concretizou, já que os alunos se mostraram pouco recetivos a esta realidade. Embora os alunos troquem ideias com os colegas não trabalham colaborativamente nem evidenciam essa necessidade.

Para além da minha mudança de perspetiva quanto ao trabalho colaborativo, fui confrontada durante o Mestrado com as potencialidades do ensino exploratório (Ponte, 2005). No entanto, ao desenvolver o planeamento da unidade de ensino percebi que a prática do ensino exploratório com os alunos desta turma poderia ter algumas limitações, dado que, os mesmos não estão muito familiarizados com este tipo de trabalho. Por este motivo, senti necessidade de dosear este tipo de abordagem, bem como atender criteriosamente ao tipo de problemas propostos aos alunos.

Em contrapartida, ao longo do ano letivo, em particular, durante a minha intervenção letiva, apercebi-me que os alunos “arriscavam” mais na resolução das tarefas de sala de aula. Penso que a “liberdade” de recorrer ao GeoGebra na aula de Matemática lhes proporcionou uma experiência positiva e levou a que os alunos adquirissem alguns hábitos de trabalho colaborativo.

Entre outros aspetos, o Mestrado permitiu-me começar a moldar a minha identidade enquanto futura professora. Para além das mudanças de perspetiva quanto ao trabalho colaborativo, permitiu-me trabalhar a minha capacidade de argumentação de resposta a situações imprevistas, de reflexão, assim como me despertou para a importância de planificar as aulas.

Reconheço que neste trabalho, a preparação da primeira unidade de ensino que iria lecionar assumiu uma importância central. Ao dar os primeiros passos na sua preparação, senti uma extrema necessidade de perceber os conhecimentos dos alunos sobre o tema pois não seria possível que estes construíssem novos conhecimentos sem outros bem consolidados. A realização de uma ficha de diagnóstico sobre o tema Funções fez-me refletir sobre a importância deste tipo de prática e, simultaneamente, para os constrangimentos que a sua realização traz para a sala de aula. No entanto, considero que a ficha diagnóstica foi uma das peças chave de toda a unidade por permitir encarar os conhecimentos e, sobretudo, as maiores dificuldades dos alunos no tema.

Outra peça chave na planificação da unidade de ensino foi, precisamente, a elaboração de tarefas que permitissem aos alunos compreender e aprender funções afins. Um dos tremendos desafios foi muitas vezes construir estas tarefas de raiz e de lhes dar um encadeamento coerente e que trouxessem mais-valias para as aprendizagens dos alunos. Considero ainda que um extraordinário complemento a estas tarefas foram as discussões em grande grupo, já que possibilitaram aos alunos o confronto com outras estratégias, com o erro e em como ultrapassá-lo.

Em algumas das aulas lecionadas tive a possibilidade de ficar com as resoluções dos alunos e fazer uma seleção mais criteriosa daquelas que pretendia que fossem apresentadas na discussão à turma. Esta reflexão mais distanciada sobre o trabalho que os alunos realizaram na aula permitiu-me identificar pormenores que, num contexto de sala de aula, muito provavelmente, me escapariam; além disso, permitiram-me planificar de uma forma mais completa o segmento da discussão e apresentação de resultados da aula seguinte.

Assim, não hesito em afirmar que a planificação e preparação das aulas lecionadas foram cruciais para o decorrer das mesmas e que, para esta planificação, um elemento importante foram as leituras, relativas à aprendizagem da Álgebra, que realizei e que me permitiram ter maior consciência para as dificuldades dos alunos, no estudo deste tema. Mais que isso, destaco como a reflexão após cada uma das aulas me permitiu evoluir e ajustar aspetos quer na planificação das aulas como na minha gestão e atuação na sala de aula.

Esta experiência permite-me hoje encarar a exigência da prática profissional do professor, da necessidade permanente de ajustar estratégias, tendo em conta as características da turma e os imprevistos que ocorrem na sala de aula. Sinto que ao longo da lecionação destas aulas fui evoluindo. Comparativamente às primeiras aulas, considero que consegui gerir melhor o trabalho dos alunos, e sobretudo a dinâmica de sala de aula. Especialmente as aulas em que foi necessário recorrer ao GeoGebra, e que requeriam um esforço acrescido de preparação e logística, foram muito desafiantes, face à minha inexperiência e tendo em conta todos os imprevistos que poderiam ocorrer.

Ao longo das aulas que lecionei, sobretudo nas primeiras, foi inevitável sentir alguma frustração, ou porque não conseguia cumprir o plano, ou porque não conseguia gerir bem o facto de os alunos se mostrarem pouco participativos, até mesmo por causa do nervosismo que sentia provocado pelos constantes ajustes nos planos de aula e nas tarefas – que mostravam ser necessários face aos avanços e recuos em sala de aula. Além disso, foi um enorme desafio, atendendo à idade dos alunos, não comprometer o rigor matemático e, por outro lado, expressar-me numa linguagem que fosse acessível e compreensível para os alunos. Aqui destaco, por exemplo, que os alunos revelaram alguma dificuldade em compreender o termo "intersecção" de duas retas que me parecia tão banal. Muitas vezes foi necessário substituir esta expressão por "cruzar" ou "cortar" para que fosse mais compreensível para os alunos.

Embora a utilização do GeoGebra nos segmentos em grande grupo, como apoio na lecionação das aulas, tenha sido um enorme desafio por requerer um ainda maior investimento na preparação das aulas, na familiaridade com o recurso, e por envolver um considerável risco na operacionalização e gestão de sala de aula, este *software* mostrou ser um poderoso recurso – tanto por ser uma ferramenta dinâmica, como por prender a atenção dos alunos. Adicionalmente, acrescento que, dada a tendência visual dos alunos, creio que o GeoGebra possa ter sido um instrumento importante para as aprendizagens que os alunos realizaram no estudo deste tema "Gráficos de Funções

Afins". Em particular, destaco que os alunos evidenciaram globalmente uma boa interpretação e compreensão gráfica de uma função afim, e que foi evoluindo positivamente com o decorrer da intervenção letiva – e que me deixa bastante realizada. Além disso, considero que, de um modo geral, os alunos revelaram apropriar-se da expressão algébrica de uma função afim e mostraram superar grande parte das dificuldades que evidenciavam no início do estudo deste tema.

Quanto ao trabalho escrito referente a este estudo, o que me provocou maior desafio foi a análise dos dados. Selecionar, confrontar e cruzar tanta informação foi por vezes difícil e bastante demorado. O interpretar essa informação também não foi fácil, sendo, por vezes, apenas possível estabelecer algumas conjeturas. Ainda nesta fase de análise dos dados vi-me confrontada com dificuldades ou conceções erróneas dos alunos, das quais não consegui ter uma tão noção clara ao longo da lecionação – o que sublinha a importância da permanente reflexão do professor sobre cada aula e, ainda, do contacto direto com as resoluções dos alunos fora do contexto da sala de aula.

Gostaria ainda de referir algo que, pelas limitações temporais deste estudo, não me foi possível aprofundar. Nomeadamente, gostaria de perceber até que ponto o GeoGebra proporciona estratégias de resolução de problemas mais sofisticadas, e se, de algum modo, a sua utilização na resolução de problemas com a função afim pode comprometer a mobilização de conceitos por parte dos alunos – ou se, por outro lado, promove uma maior destreza na mobilização dos conceitos.

Gerir a frustração, cumprir os tempos, as trocas de sala, tornar os equipamentos da sala operacionais, contornar os imprevistos técnicos, monitorizar o trabalho dos alunos, desafiá-los, motivá-los, privilegiar as suas aprendizagens foi um permanente desafio! Todas as horas passadas em frente ao computador a planear as tarefas e as aulas, a ajustá-las, bem como os momentos de discussão e reflexão em torno das tarefas e dos planos de aula possibilitaram extraordinárias aprendizagens e valeram cada segundo de dedicação, pela experiência de pude ter…a de entrar naquela sala de aula com aqueles alunos, os "meus" alunos!

Acho que ainda hoje me debato em acreditar que já passaram dois anos desde o primeiro dia mas, estou seguramente convicta que foram os melhores dois anos tanto em aprendizagem, como em realização pessoal. Mais que isso, foi tudo o que eu sempre quis e, claro, superou qualquer expectativa. Enquanto futura professora de Matemática tenho muito para aprender, sei que poderei aprender todos os dias e estou desejosa de ter essa oportunidade.

Referências

Abrantes, P. (1985). *Planificação no Ensino da Matemática*. Acedido em http://www.netprof.pt/netprof/servlet/getDocumento?TemaID=NPL070103&id_versao=11892

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, *8*, 7-10.

Abrantes, P. (2000). Princípios sobre currículo e avaliação. In *Proposta de reorganização curricular do ensino básico*. (documento de trabalho). Lisboa: ME – Departamento de Educação Básica.

Agrupamento de Escolas de Caneças (2015). *Projeto Educativo 2014/2018.* Acedido em http://aecanecas.com/images/docs/Projeto_Educativo_AE_Canecas.pdf

Ayalon, M., Watson, A., & Lerman, S. (2015). Functions represented as linear sequential data: relationships between presentation and student responses. *Educational Studies in Mathematics, 90,* 321–339. doi 10.1007/s10649-015-9628-9

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Canário, M. F. M. (2011). *Modelação e utilização das tecnologias no estudo da função afim: um estudo de caso*. (Dissertação de Mestrado). Acedido em http://hdl.handle.net/10451/6038

Candeias, A. F. F. (2010). *Aprendizagem das Funções no 8.º ano com o auxílio do software GeoGebra*. (Dissertação de Mestrado). Acedido em http://hdl.handle.net/10451/2551

Consciência, M. (2013). *A calculadora Gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário.* (Tese de Doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Coutinho, C. P. (2013). *Metodologia de investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática.* Coimbra: Edições Almedina.

Daher, W., & Anabousy, A. (2015). Students' Conceptions of Function Transformation in a Dynamic Mathematical Environment. Acedido em http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/daher.pdf

Dietiker, L. (2015). Mathematical story: a metaphor for mathematics curriculum. *Educational Studies in Mathematics, 90,* 285-302. doi 10.1007/s10649-015-9627-x

Eisenmann, P., Novotná, J., Pribyl, J., & Brehovský, J. (2015). The development of a culture of problema solving with secondary students through heuristic strategies. *Mathematics Education Research Journal*, *27*(4), 535-562. doi 10.1007/s13394-015-0150-2

Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 61-75. doi 10.1007/s10649-006-9069-6

Fernandes, E. (2013). *Representações em situações problemáticas que envolvem inequações do 1.º grau a uma incógnita: Um estudo com alunos do 9.º ano de escolaridade.* (Dissertação de Mestrado). Acedido em http://hdl.handle.net/10451/9839

Freiman, V., & Manuel, D. (2015). Relating students' perceptions of interest and difficulty to the richness of mathematical problems posted on the CAMI website. *Quadrante*, *24*(2), 61-84.

Friendland, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representation in algebra. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Gafanhoto, A. P., & Canavarro, A. P. (2013). *A adaptação das tarefas matemáticas: como promover o uso de múltiplas representações*. Acedido em https://plataforma.elearning.ulisboa.pt/file.php/5856/3_AGAFANHOTO_APCANAVARRO.pdf

Gafanhoto, A. P., & Canavarro, A. P. (2014). A adaptação das tarefas matemáticas: como promover o uso de múltiplas representações. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 113-132). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Granberg, C., & Olsson, J. (2015). ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. *Journal of Mathematical Behavior*, *37*, 48-62.

Hall, J., & Chamblee, G. (2013). Teaching Algebra and Geometry with GeoGebra: Preparing Pre-Service Teachers for Middle Grades/Secondary Mathematics Classrooms. *Computers in the Schools*, *30:1-2*, 12-29. doi 10.1080/07380569.2013.764276

Hewson, S. (2011). *What is a mathematically rich task?* Acedido em http://nrich.maths.org/6299

Hunting, R. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practices. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(2), 145-165.

Lahikainen, A. R., Kirmanen, T., Kraav, I., &Taimalu, M. (2003). Studying Fears in Young Children: Two Interview Methods. *Childhood, 10*(1), 83–104.

Lester. F. K. (1980). Research on mathematical problem Solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Educations* (pp. 286-323). Reston, VA: NCTM.

Loureiro, N. M. S. (2013). *A representação gráfica das funções linear e afim: um estudo com alunos do 8.º ano.* (Relatório da Prática de Ensino Supervisionada). Universidade de Lisboa. Acedido em http://hdl.handle.net/10451/9826

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: MEC.

NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (2ª edição). Lisboa: APM.

Oliveira, H., Canavarro, A. P., & Menezes, L. (2012). Cubos com autocolantes (1.º ciclo) – caso multimédia. In *Site do Projeto P3M, Práticas Profissionais de Professores de Matemática*. (Acessível em http://p3m.ie.ul.pt/caso1-cubos-com-autocolantes-1-ciclo)

Oliveira, H., & Domingos, A. (2008). Software no ensino e aprendizagem da Matemática: algumas ideias para discussão. In A. P. Canavarro, D. Moreira, & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 279-285). Porto: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Pólya, G. (1957). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1967). L'enseigment par les problèmes. *L'Enseigment Mathématique, vol.12*, 233-241.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Ponte, J. P. e Canavarro, P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didática da Matemática do 1.º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Preston, R., & Garner, A. S. (2003). Representation as a vehicle for solving and communicating. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*(1), 38-43.

Roldão, M. (2009). *Estratégias de Ensino*. Vila Nova de Gaia: Fundação Manuel Leão.

Ronda, E. (2015). Growth points in linking representations of function: a research-based framework. *Educational Studies in Mathematics, 90*, 303-319. doi 10.1007/s10649-015-9631-1

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. London: Academic Press

Stake, R. (1995). *The Art of Case Study Research*. USA: SAGE Publications.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Matemática: Funções – 10.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação- Departamento do Ensino Secundário.

Anexos

Anexo 1

Ficha de Diagnóstico

Anexo 1.1 – Ficha de diagnóstico proposta aos alunos

	Ficha Diagnóstica nº ____ – 8.º Ano Data: 16 de março de 2016 Aluno:____________________________________ N.º: ____ Turma: ____
Professora: ____________________	Observações:____ ____

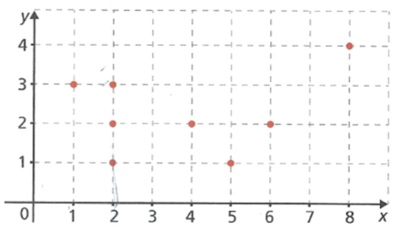
Leia atentamente todas as questões. Justifique sempre que necessário todas as respostas. Apresente todos os cálculos que efetuar. Nas questões de escolha múltipla escolha apenas uma das opções apresentadas, se escolher mais do que uma opção a questão será anulada.

1. Observa as correspondências seguintes:

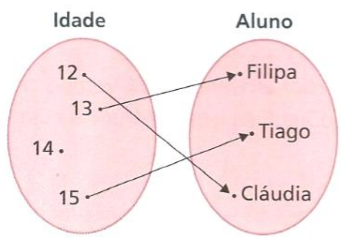
(A)

Comprimento do lado	0,1	2,4	3,6	12	100
Perímetro do pentágono regular	0,5	12	18	60	500

(B)



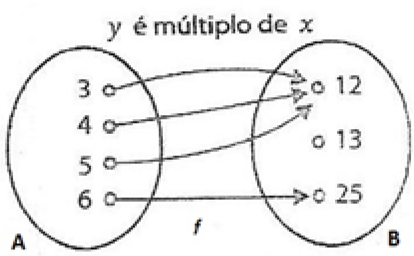
(C)



Indica, justificando a tua resposta, quais das correspondências (A), (B), (C) representam ou não representam uma função.

2. A função f está representada por um diagrama de setas.

2.1. Indica:



a) o domínio da função f.

b) o contradomínio da função f.

c) o conjunto de chegada da função f.

2.2. Observa a representação da função f e indica:

a) $f(6) =$ ______

b) $f($_____$) = 25$

3. Considera as funções, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, definidas por:

$f(x) = -9x + 1$ $\quad\quad$ $g(x) = -4x$ $\quad\quad$ $h(x) = 11$

3.1. Indica o coeficiente de x e o termo independente da função f.

3.2. Indica se cada uma das funções é constante, linear ou afim, justificando a tua resposta.

3.3. Determina, apresentando os cálculos efetuados:

a) $f(-1) =$

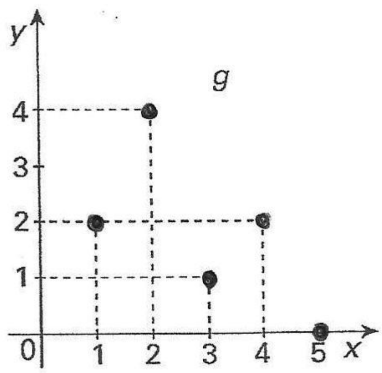
b) a imagem de 0 por meio da função *h*. __________

c) $g($___$) = -1$

3.4. Qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico da função *f*? Escolhe a opção correta e justifica a tua resposta.

(A) (-2,-17) **(B)** (0,-1) **(C)** (1,0) **(D)** (-3,28)

4. No referencial da figura está representado o gráfico de uma função *g*.



4.1. Qual é a variável independente?

4.2. Qual é a variável dependente?

4.3. Representa em extensão:

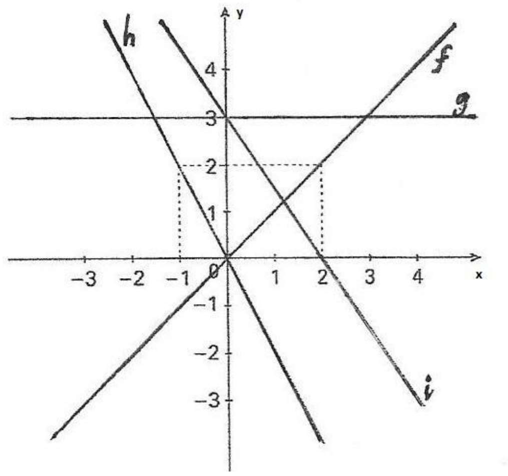
a) o domínio da função g.

$D_g =$

b) o contradomínio da função g.

$D'_g =$

5. Considera as funções representadas no mesmo referencial cartesiano da figura.



5.1. Observa os gráficos e estabelece a correspondência entre cada função e a respetiva expressão algébrica.

f •	• $y = -2x$
g •	• $y = x$
h •	• $y = -\frac{3}{2}x + 3$
i •	• $y = 3$

5.2. Indica para cada função f, g, h e i se se trata de uma função constante, linear ou afim. Justifica a tua resposta.

6. A tabela representa uma relação de proporcionalidade direta, $x \hookrightarrow y$.

$\boldsymbol{x}$	$\frac{1}{5}$	2	$\frac{7}{2}$	5		9
$\boldsymbol{y}$	20		350	500	700	900

6.1. Indica a constante de proporcionalidade. Justifica a tua resposta.

6.2. Completa a tabela.

6.3. Determina uma expressão algébrica para a função de proporcionalidade direta, f, associada à tabela.

7. O Rafael observa uma tempestade. A tabela seguinte mostra a relação entre o tempo (em segundos) decorrido entre o relâmpago e o trovão, e a distância (em quilómetros) a que a trovoada ocorre do Rafael.

Tempo (*s*)	10	20	30	60
Distância (*Km*)	3,4	6,8	10,2	20,4

7.1. Neste contexto, podes afirmar que a distância (em quilómetros) e o tempo (em segundos) são grandezas diretamente proporcionais? Explica a tua resposta.

7.2. A que distância do Rafael ocorre a trovoada se o tempo que decorre entre o relâmpago e o trovão é de 1,5 minutos?

7.3. Escreve uma expressão algébrica que relacione as duas variáveis (tempo e distância).

Bom trabalho!

Anexo 1.2 – Análise da ficha de diagnóstico proposta aos alunos

Ao optar pela realização de um teste diagnóstico pretendia encontrar informações mais concretas acerca das aprendizagens dos alunos relativamente ao tópico "Funções" de 7.º ano, de forma a poder ter em consideração esses dados ao longo da minha intervenção letiva, no âmbito do tema "Gráficos de Funções Afins". Esta minha opção está relacionada com o facto de a Orientadora Cooperante não conhecer a turma do ano letivo anterior, no qual, esta turma teve cinco professores de Matemática distintos. A elaboração deste teste diagnóstico teve como linha orientadora os conteúdos programáticos previstos pelo Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico para o 7.º ano de escolaridade, numa perspetiva de perceber a destreza e familiaridade dos alunos nesta temática.

Globalmente, os alunos não acolheram muito bem a realização desta ficha, demonstrando alguma desmotivação por se tratar de um tema abordado no 7.º ano, pelo que, ao longo da realização da ficha, os alunos começaram gradualmente a demonstrar desinteresse, não tenho respondido a muitas questões. Ainda assim, parece-me útil realizar uma análise das respostas dos alunos procurando encontrar algumas evidências de aprendizagens realizadas e de erros e dificuldades nesta temática. A grande maioria dos alunos revela a noção de função como uma correspondência, invocando noções como domínio, contradomínio, objeto, imagens ou termo. No entanto, alguns alunos referem que uma tabela ou gráfico não pode representar uma função, Assim, penso que ao longo das aulas o conceito de função precisa ser melhor trabalhado, nomeadamente, o conceito e as suas múltiplas representações.

Na segunda questão da ficha, a escrita do domínio da função parece ser consensual, no entanto, um número significativo de alunos troca o contradomínio e o conjunto de chegada. Face à falta de rigor demonstrada pelos alunos na escrita destes conjuntos, ao longo da prática letiva, precisarei reforçar a escrita em compreensão do domínio, contradomínio e conjunto de chegada, bem como o significado destes conjuntos.

Na terceira questão houve 10 alunos que não apresentaram uma resposta. Aqui foi notório que os alunos não distinguem o coeficiente da variável, dado que um expressivo número de alunos escreveu que o coeficiente de x é $-9x$. Mais de metade dos alunos que responderam a esta questão, indicaram 1 como termo independente da função. Já um significativo número de alunos não consegue classificar uma função, dada a sua expressão analítica. Este facto evidencia a necessidade de proporcionar aos alunos o contacto com diferentes tipos de funções afins, bem como trabalhar a interpretação deste tipo de função e a sua representação gráfica. Dada a expressão analítica de uma função, os alunos demonstraram não estar muito familiarizados com a determinação das imagens de uma função, dado o objeto, e reciprocamente, o que mostra a necessidade de trabalhar o determinar de objetos e imagens por meio de diversas funções. Os alunos revelaram alguma hesitação ao serem confrontados com a questão relativa à verificação se um certo ponto pertencia ao gráfico de uma função, e nenhum dos alunos que respondeu corretamente apresentou cálculos ou outros elementos justificativos da sua resposta.

Na quarta questão, ainda que cerca de dez alunos não tivessem respondido, é possível observar que os restantes revelam dúvidas ao indicar as variáveis dependentes e independentes. Em alguns casos, indicaram a função g como sendo a variável independente, ou ainda, um valor numérico, por exemplo 5, e o mesmo aconteceu para a variável dependente. Ao indicar o domínio da função, a maioria dos alunos foi coerente com o que indicou anteriormente para a variável dependente e independente, mas foi novamente notório, salvo poucas exceções, a falta de rigor na escrita destes conjuntos, e verifiquei ainda que algumas respostas em que estes conjuntos tinham apenas um número, como 1 ou 2. A referida descrição reforça a necessidade de trabalhar com os alunos estas noções basilares do tema "Funções", para que com esses conhecimentos consolidados seja possível aprofundar a temática.

Na questão cinco, relacionar a expressão analítica da função constante com a sua representação gráfica parece ser a que representa menos dificuldade para os alunos, sendo que, no total, apenas existiram duas respostas com todas as correspondências verdadeiras. Já a identificação de uma função como linear ou afim parece não ser clara para os alunos, pelo que, estas noções terão de ser consolidadas das minhas intervenções, para que os alunos possam ser críticos ao representar graficamente as funções afins (em sentido lato).

Dos 21 alunos que responderam à questão seis, 17 completaram corretamente a tabela de proporcionalidade direta. No entanto, os alunos não explicitaram os seus cálculos, e apenas 11 alunos indicaram a constante de proporcionalidade, surgindo respostas como: "é 100 porque o y a dividir pelo x é 100", ou simplesmente "x100", e também "$\frac{500}{5} = 100$" ou "em cima multiplicamos por 100 e em baixo dividimos". Em contraste, surgiram respostas que indicavam 150 como a constante de proporcionalidade por ser "a diferença entre os valores", ou que referiam a constante como sendo $\frac{1}{5}$, simplesmente "x" ou "x e y". Três alunos escreveram uma expressão algébrica para traduzir a relação de proporcionalidade: "$f = 5x$", "$x \times 100 = y$" e "$n{:}\quad (n \times 100)$".

Da sétima questão sobressai que os alunos revelam ter a noção de proporcionalidade direta. Ao determinar a constante de proporcionalidade a maioria das respostas centrou-se no quociente entre a distância e o tempo, ou entre o tempo e a distância. Para a justificação da existência de proporcionalidade direta alguns alunos apoiaram-se nos dados da tabela, indicando que, quer no tempo, quer na distância, os valores "mudam para o dobro". Um aluno indicou ainda que a relação não é de proporcionalidade direta porque dos 20 segundos para os 30 segundos a relação "não segue sempre o dobro". Os dados referidos juntamente com as informações da análise da questão seis levam-me a pensar que será necessário que os alunos consolidem a noção de relação de proporcionalidade direta, sobretudo o processo de generalização para alcançar a expressão algébrica da função. Apesar de poucos alunos responderem a esta questão, as estratégias foram diversificadas e o maior obstáculo foi a não conversão de minutos para segundos. Alguns alunos chegaram à imagem multiplicando os 90segundos pela constante de proporcionalidade, enquanto outros manipularam os valores da tabela até alcançar o resultado, considerando implicitamente a noção de proporcionalidade direta. Ao relacionar as duas variáveis apenas dois alunos escreveram a expressão algébrica da função, tendo ainda surgido respostas que apontam para a razão entre tempo e distância.

Com o avançar das questões da ficha diagnóstico, os alunos optaram por deixar de responder. O referido aspeto fez-me refletir acerca da elaboração desta ficha e de como o facto de ser a última semana de aulas pode ter causado algum desinteresse, juntamente com a extensão da ficha. Apesar dos aspetos referidos, penso que a realização do diagnóstico forneceu importantes informações para a minha intervenção letiva, sobretudo ao nível das primeiras aulas, onde penso que será fundamental consolidar os tópicos abordados no 7.º ano. Assim, parece-me que as primeiras aulas serão um crucial momento de consolidação, sobretudo nos segmentos de aula em grande grupo, visto que será uma oportunidade para confrontar ideias e desfazer algumas conceções erróneas, consolidando outras, com vista a aprendizagens sólidas por parte dos alunos no âmbito do tema "Gráficos de Funções Afins".

Anexo 2

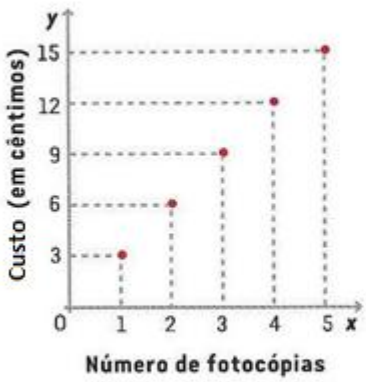
Fichas de Trabalho e Tarefas Propostas

Anexo 2.1 – Ficha de Trabalho n.º 1

Matemática 8.º Ano	Data: 4.abril.2016 Aluno:______________________ N.º: _____ Turma: _____	AGEESC AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CANEÇAS
Ficha de Trabalho N.º 1	Funções	

Justifica o teu raciocínio em todas as respostas e apresenta todos os cálculos que efetuares.

1. Para promover o espetáculo de final de ano da sua escola, a Alice decidiu imprimir panfletos para a sua divulgação. O custo das impressões na papelaria está representado no gráfico seguinte.



1.1. Observa o gráfico e completa a tabela:

Número de fotocópias		2		4	5
Custo (cêntimos)	3	6	9	12	

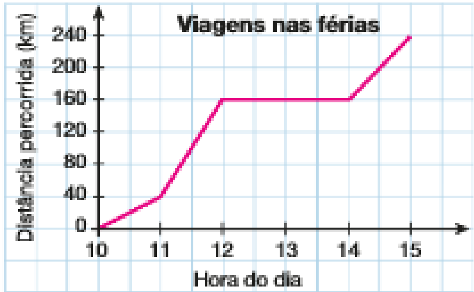
1.2. Neste contexto, podes afirmar que o número de fotocópias e o custo (em cêntimos) são diretamente proporcionais? Explica a tua resposta.

1.3. Quanto pagaria a Alice se quisesse fazer 998 fotocópias do seu panfleto? Apresenta o resultado em euros.

1.4. Escreve uma expressão algébrica que relacione as duas variáveis (número de fotocópias e o custo). Explica como obtiveste essa expressão.

1.5. Quantas fotocópias dos panfletos poderá a Alice fazer se só quiser gastar 25 euros? Justifica a tua resposta.

2. Nas férias da Páscoa a Alice foi com a sua família passear de automóvel à Serra da Estrela. Saíram de manhã, mas só chegaram às 15h ao seu destino porque pararam pelo caminho para almoçar. O gráfico ao lado indica a distância percorrida pela família a partir do momento em que saíram de casa.



2.1. A que horas a família da Alice saiu de casa?

2.2. A que horas a família da Alice parou para almoçar?

2.3. Quanto tempo durou a paragem para o almoço? Explica a tua resposta.

2.4. Ao observares o gráfico, o que podes dizer sobre as duas primeiras horas de viagem da Alice? Explica a tua resposta.

2.5. Quanto tempo, após o início da viagem, chegou a Alice à Serra da Estrela? Justifica a tua resposta.

2.6. Indica, justificando, que distância percorreu a Alice para chegar à Serra da Estrela?

Anexo 2.2 – Ficha de Trabalho n.º 2

Matemática 8.º Ano	**Data: 6.abril.2016** AGEESC AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CANEÇAS **Aluno:______________________________ N.º: _____ Turma: ____**
Ficha de Trabalho N.º 2	**Funções - Parte 2**

Justifica o teu raciocínio em todas as respostas e apresenta todos os cálculos que efetuares.

3. A Alice foi com o seu pai à padaria que diariamente tem 60 pães de tamanho médio para venda. O custo de cada pão desse tipo é de 60 cêntimos.

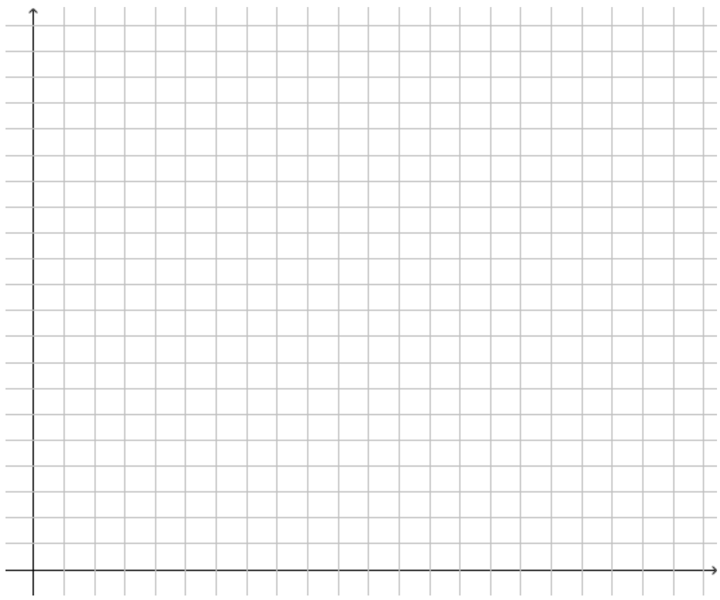
3.1. Quantos pães se podem comprar com 16 euros?

3.2. Completa a tabela seguinte.

Número de pães comprados (por cliente) (x)		10		52	60
Custo (em euros) (y)	1,2		13,8		

3.3. Escreve uma expressão algébrica da função f que relaciona o custo (em euros), com o número de pães comprados.

3.4. Atendendo a este contexto, utiliza os dados da tabela e constrói uma representação gráfica da função *f*.



3.4.1. Indica as coordenadas de um ponto que pertença ao gráfico da função.

3.4.2. O ponto Q (70;42) pertence ao gráfico da função f? Justifica a tua resposta.

3.4.3. É possível que a Alice tenha pago 4,5 euros pela compra de uma certa quantidade deste tipo de pães? Justifica a tua resposta.

3.4.4. Indica as principais características do gráfico desta função.

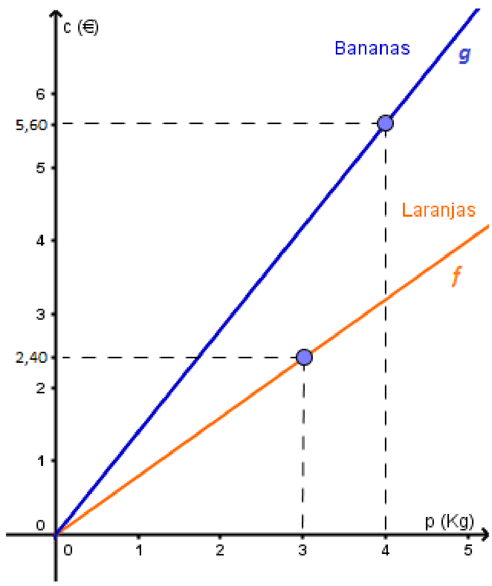
Adaptado da Brochura de Álgebra

Anexo 2.3 – Ficha de Trabalho n.º 3

Matemática 8.º Ano	Data: 7.abril.2016 Aluno:______________________ N.º: _____ Turma: _____
Ficha de Trabalho N.º 3	**Funções - Parte 3**

Justifica o teu raciocínio em todas as respostas, apresentado todos os cálculos que efetuares.

4. O Ricardo acompanhou o seu pai ao supermercado. No referencial ao lado estão representadas graficamente as funções f e g que relacionam, respetivamente, as quantidades p (em quilogramas), e os custos c (em euros), de laranjas e bananas que são vendidas nesse supermercado.



4.1. Quanto pagará um cliente que compre $3kg$ de laranjas e $4\ kg$ de bananas?

4.2. O Ricardo levou para casa $2kg$ de bananas e $1kg$ de laranjas. Indica, justificando, quanto pagou pela fruta.

4.3. Se o pai do Ricardo quisesse gastar 6 euros em laranjas, que quantidade (em quilogramas) de laranjas compraria? Justifica.

4.4. Determina, para cada uma das funções f e g a sua expressão algébrica. Explica como obtiveste cada uma das expressões.

4.5. **a)** Indica características comuns às duas funções f e g.

b) Indica o que distingue as duas funções f e g.

4.6. "As funções f e g são constantes". Indica, justificando, se esta afirmação é verdadeira ou falsa.

1.7. Este supermercado tem a opção de entrega ao domicílio. Este serviço tem um custo fixo de 2 euros, para além do preço dos produtos.

(a) Quanto pagará o pai do Ricardo se comprar $3kg$ de laranjas e optar pelo serviço de entrega ao domicílio? Justifica.

(b) Qual a diferença entre o valor que obtiveste na alínea anterior e o que o pai do Ricardo pagaria se não quisesse a entrega ao domicílio? Explica a tua resposta.

(c) Escreve a expressão algébrica que traduz a função j, que corresponde ao custo total do serviço de entrega e da quantidade (em quilogramas) de laranjas adquiridas pelo cliente.

1.8. Representa no referencial seguinte as funções f e j.

1.8.1. Que características comuns têm as representações gráficas das duas funções? Explica a tua resposta.

1.9. Indica, justificando, que relação existe entre as expressões algébricas das funções f e j.

2. O Rafael quis mudar o tarifário do seu telemóvel e foi pesquisar as tarifas em duas empresas.
Na empresa F, existia um custo fixo mensal de 3 euros e por cada minuto de conversação o Rafael pagaria 12 cêntimos.
Na empresa G, para além do custo fixo mensal de 7 euros, o Rafael teria de pagar 5 cêntimos por minuto de conversação.

2.1. Preenche a tabela seguinte, considerando f e g as funções que fazem corresponder o número de minutos de conversação ao preço mensal do tarifário (em euros) no tarifário F e G, respetivamente.

Número de minutos de conversação (por mês)	30	45	90	175	223
Custo mensal do Tarifário F (em euros)	6,60€			24€	
Custo mensal do Tarifário G (em euros)		9,25€		15,75€	

2.2. Neste contexto, qual é a variável dependente e a variável independente?

2.3. Determina $g(30)$ e explica o resultado neste contexto.

2.4. As funções f e g são funções constantes, lineares ou afins? Explica a tua resposta.

2.5. Indica uma expressão algébrica para cada uma das funções f e g, considerando x o número de minutos utilizados por mês para cada tarifário.

2.6. Indica o coeficiente de x e o termo independente:

2.6.1. da função f.
2.6.2. da função g.

2.7. Habitualmente, o Rafael fala ao telefone uma hora e 15 minutos por mês. Qual te parece ser o tarifário mais vantajoso para ele? Explica a tua resposta.

Anexo 2.4 – Tarefa “Funções no GeoGebra”

Matemática **8.º Ano**	**Data: 11.abril.2016** **Aluno:**________________________ **N.º:** ____ **Turma:** ____
Tarefa “Funções no GeoGebra”	

Utiliza o GeoGebra para resolver as seguintes questões e recorre a cálculos auxiliares apenas quando for indicado.

1. No ambiente de trabalho do computador, abre a pasta “Matemática” e clica para abrir o ficheiro do GeoGebra **Q1**.

1.1. Traça a representação gráfica das seguintes funções, na *Folha Gráfica 2D* do GeoGebra:

1.1.1. $a(x) = 8$

1.1.2. $f(x) = 3x$

1.1.3. $h(x) = -7x + 6$

Grava todas as alterações que efetuares no ficheiro **Q1.**

1.2. Representa os pontos A(6, -1) e B(3, 5) na *Folha Gráfica 2D* e com o auxílio do GeoGebra traça a reta que passa por esses dois pontos.
(**Sugestão:** para traçar a reta consulta **as páginas 4 e 5 do Guião do GeoGebra)**

Grava todas as alterações que efetuares no ficheiro **Q1.**

1.2.1. Recorrendo exclusivamente ao **GeoGebra** escreve a equação da reta que traçaste.

1.3. Na mesma *Folha Gráfica 2D* do GeoGebra:

1.3.1. Traça uma representação gráfica de uma função paralela à função constante referida em 1.1.

Grava todas as alterações que efetuares no ficheiro **Q1.**

(a) Recorrendo aos dados da *Folha Algébrica* do GeoGebra, indica a expressão algébrica dessa função.

1.3.2. Traça uma representação gráfica de uma função linear paralela a $h(x)$.

Grava todas as alterações que efetuares no ficheiro **Q1.**

(a) Recorrendo aos dados da *Folha Algébrica* do GeoGebra, indica a expressão algébrica dessa função.

1.3.3. Traça uma representação gráfica de uma função linear distinta das que já representaste.

Grava todas as alterações que efetuares no ficheiro **Q1.**

(a) Recorrendo aos dados da *Folha Algébrica* do GeoGebra, indica a expressão algébrica da função dessa função

Anexo 2.5 – Tarefa “Um Passeio de Bicicleta”

Matemática **8.º Ano**	**Data: 14.abril.2016** **Aluno:**_______________ **N.º:** _____ **Turma:** _____
Tarefa “Um Passeio de Bicicletas”	

- Justifica o teu raciocínio em todas as respostas.
- Caso consideres necessário, recorre ao GeoGebra para resolver alguma(s) das seguintes questões. Nesse caso, utiliza o ficheiro **Q1** da pasta “Matemática”, do ambiente de trabalho.

2. Um grupo de amigos combinou fazer um passeio de bicicletas. Como nem todos os elementos do grupo tinham bicicletas, foram informar-se do valor a pagar pelo aluguer de uma bicicleta em duas empresas.

- Na empresa M, o preço a pagar (em euros) em função do tempo (em horas) do aluguer da bicicleta é dado pela função $m(x) = 6x + 1$, e inclui 1 euro do aluguer obrigatório de um capacete.

- Na empresa P, observaram alguns valores que os clientes tinham pago e que incluíam 4 euros do aluguer obrigatório de um capacete:

Número de horas do aluguer	3	4	7
Custo do aluguer (em euros)	16	20	32

2.1. O grupo de amigos quer passear de bicicleta durante uma hora.
Na tua opinião, em que empresa será mais vantajoso fazer o aluguer das bicicletas para uma hora? Explica a tua resposta.

Caso utilizes o GeoGebra, grava todas as alterações que efetuares no ficheiro **Q1.**

2.2. Um dos amigos afirmou: “É sempre mais vantajoso alugar as bicicletas na empresa M porque pagam menos pelo uso do capacete”.
Concordas com esta afirmação? Justifica a tua resposta.

Caso utilizes o GeoGebra, grava todas as alterações que efetuares no ficheiro **Q1.**

2.3. Em qual das empresas deve o grupo de amigos alugar a bicicleta? Explica a tua resposta.

Caso utilizes o GeoGebra, grava todas as alterações que efetuares no ficheiro **Q1.**

Anexo 2.6 – Ficha de Trabalho n.º 4

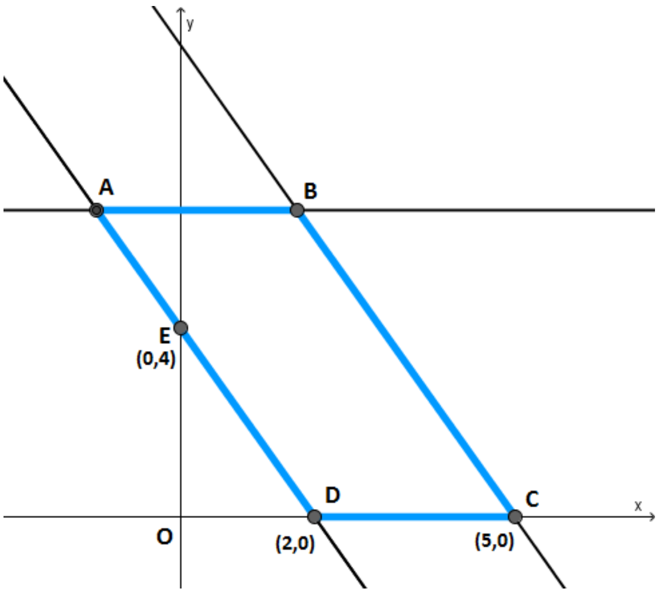
<table>
<tr><td>Matemática

8.º Ano</td><td>Data: 21.abril.2016

Aluno:_____________________________ N.º: _____ Turma: ____</td></tr>
<tr><td>Ficha de Trabalho N.º 4</td><td>Gráficos de Funções Afins</td></tr>
</table>

Justifica o teu raciocínio em todas as respostas e apresenta todos os cálculos que efetuares.

1. O Ricardo diz que sabe usar o que aprendeu nas aulas de Matemática sobre equações de retas para desenhar um paralelogramo. Observa a figura e indica como o Ricardo pode obter um paralelogramo com vértices A, B, C e D, usando o seu conhecimento sobre equações de retas.



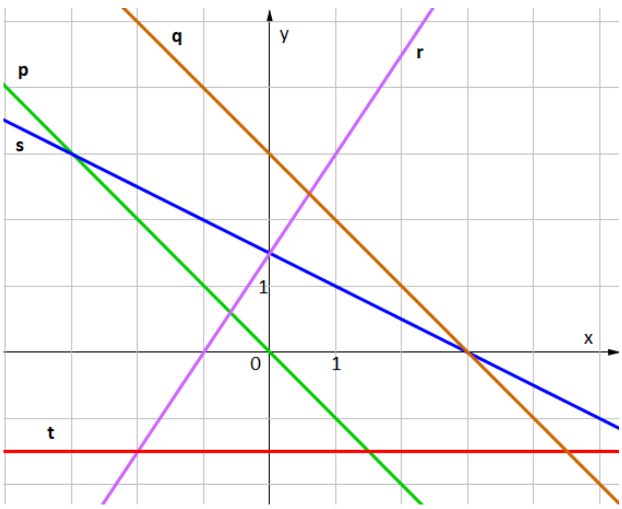
2. Observa as retas da figura e, <u>sem efetuares cálculos</u>, responde às questões seguintes.

2.1. Indica, justificando, a(s) reta(s) da figura que têm declive:

(a) positivo.

(b) negativo.

(c) nulo.



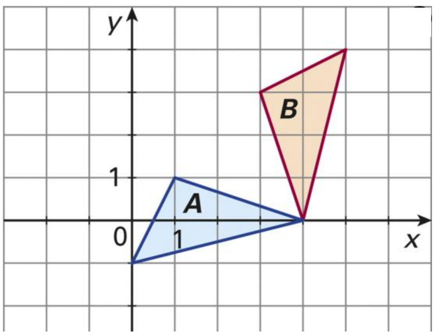
2.2. Sem efetuares cálculos, associa a cada uma das equações seguintes uma das retas p, q, r, s e t representadas no referencial acima.

(A) $y = -x$ (reta ___) **(B)** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta ___) **(C)** $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta ___)

(D) $y = -\frac{3}{2}$ (reta ___) **(E)** $y = -x + 3$ (reta ___)

3. Considera os pontos $A(2,5)$, $B(8,-7)$ e $P(-3,9)$.
Escreve uma equação da reta paralela à reta AB e que passe pelo ponto P.

4. Escreve a equação do eixo de reflexão que transforma a figura geométrica A na figura geométrica B.



Adaptado do manual "Matemática 8"

Anexo 3

Planificação das Aulas

Anexo 3.1 – Planificação da 1.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 1.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 113 e 114 4 de abril de 2016

Sumário: Introdução do tema Funções. Noções de função, proporcionalidade direta e função linear.

Duração da aula: 90 minutos

Objetivos:
- Reconhecer uma função em diferentes representações
- Interpretar uma situação de proporcionalidade direta e reconhecer uma função de proporcionalidade direta como uma função linear
- Interpretar o gráfico de uma função, atendendo ao contexto

Conhecimentos prévios dos alunos:
- A noção de função, domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto
- Reconhecer uma situação de proporcionalidade direta,
- Reconhecer gráficos de funções por troços (ou ramos)

Recursos para o professor:	**Recursos para o aluno:**
▪ Ficha de trabalho n.º 1 ▪ Computador e projetor ▪ Manual escolar ▪ Quadro e marcador	▪ Ficha de trabalho n.º 1 ▪ Material de desenho e escrita ▪ Manual escolar

Metodologia de trabalho:
- Introdução da tarefa, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, individual ou a pares (de acordo com a disposição na sala de aula).

Momentos da aula:

Momentos da aula	Tempo previsto (em 90 minutos)
1.º Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	5 min
2.º Introdução ao tema "Gráficos de Funções Afins", articulação com conteúdos já trabalhados do 7.º e do 8.º ano e apresentação de um exemplo	15 min
3.º Apresentação da ficha de trabalho n.º 1	5 min
4.º Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1	15 min
5.º Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 1	10 min

6.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 2	15 min
7.º	Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 2	10 min
8.º	Síntese de conteúdos	5 min
9.º	Resolução de questões do Caderno de Atividades dos alunos, páginas 75 e 76	5 min
10.º	Encerramento da aula	5 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças | 5 minutos

Antes do início da aula a professora deverá acautelar o funcionamento do seu computador e do projetor.

Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos e ditará o sumário. Uma vez que é a primeira aula do 3.º período, haverá espaço para alguns comentários relativos às férias e ao novo período escolar.

2.º - Introdução ao tema "Gráficos de Funções Afins" | 15 minutos

Para iniciar a subunidade "Gráficos de Funções Afins" a professora deverá fazer alusão aos tópicos do tema "Funções" do 7.º ano presentes no teste diagnóstico e referir que a aula irá centrar-se no recordar de alguns conceitos e aspetos que foram trabalhados no 7.º ano. Este será também o momento oportuno para chamar a atenção dos alunos sobre a importância do estudo desta subunidade para a resolução gráfica de sistemas de duas equações, que já trabalharam analiticamente.

Neste momento, com o objetivo de que todos os alunos se encontrem nas mesmas condições para o estudo desta subunidade, a professora projetará no quadro branco uma questão, a título de exemplo, que será resolvida e discutida em grande grupo. Nesta fase inicial da aula, a professora questionará os alunos sobre se a representação do diagrama de setas, apresentada, é uma função, questionando "O que é uma função?". Face às intervenções dos alunos a professora deverá sublinhar que a cada elemento do primeiro conjunto deve corresponder a um e um só elemento do segundo conjunto, concluindo-se que a representação é uma função, discutindo o facto de 3 não ser imagem de nenhum objeto à luz da definição de função.

As questões seguintes serão, do mesmo modo, discutidas em grande grupo com o objetivo de relembrar e clarificar os alunos acerca destes conteúdos. Durante esta interação a professora deverá atender aos resultados do teste diagnóstico, dando especial ênfase às notações utilizadas, procurando que os alunos as interpretem.

Após a discussão do exemplo, haverá lugar a uma pequena síntese destes conceitos: função, domínio, contradomínio, conjunto de chegada, objeto e imagem, que será projetada no quadro e que os alunos deverão registar no caderno diário.

3.º - Apresentação da Ficha de Trabalho n.º 1 | 5 minutos

Ao distribuir a Ficha de Trabalho, os alunos serão informados do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho. Ao informar os alunos que o trabalho autónomo deverá ser realizado a pares, a professora deverá sublinhar a importância de justificarem todas as respostas e apresentarem sempre os cálculos auxiliares que efetuarem na ficha de trabalho, destacando que todas as respostas devem ser dadas nessa ficha que será recolhida no final da aula (para efeitos da investigação que é do conhecimento dos alunos) e devolvida na aula seguinte. Nesta ocasião, a professora irá reforçar que os alunos não devem apagar os seus registos das fichas de trabalho e, caso se enganem, devem fazer um traço por cima. Deverá ainda reforçar que o registo da correção deve ser feito pelos alunos no caderno diário e que, em circunstância alguma, deverão apagar o que escreveram na ficha de trabalho. Os alunos serão também informados que apesar do trabalho ser realizado a pares, todos os alunos receberão uma ficha de trabalho e cada um deverá dar a resposta na sua folha.

A professora solicitará a um aluno que leia para a turma a primeira questão da ficha de trabalho, questionando se existem dúvidas no que leram, solicitando, nesse caso, a outro aluno que explique a situação proposta para o colega. Após este segmento, a professora indicará que os alunos dispõem de 15 minutos para a resolução da questão 1 e que a esse momento se seguirá uma discussão em grande grupo.

Durante a resolução autónoma dos alunos e no momento de discussão a ficha de trabalho será projetada no quadro branco, sendo um auxílio, sobretudo, aquando a apresentação dos resultados.

4.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1 | 15 minutos

A professora circulará pela sala durante a realização da questão 1, com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades, privilegiando o questionamento, e de monitorizar o seu trabalho, acautelando também possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, promovendo a sua autonomia e entreajuda, evitando validar as suas respostas.

A professora deve atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro. Os aspetos mencionados estendem-se para os restantes segmentos de trabalho autónomo.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	**Estratégias 1.1:** - Completar a tabela por observação do gráfico; - Observar os valores na tabela e completá-la, recorrendo ao preço de uma fotocópia; - Observar os valores na tabela e completá-la recorrendo à regra de três simples. **Dificuldades 1.1:** Não são esperadas muitas dificuldades já que a resposta resulta da observação da representação gráfica. Ainda assim, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Ao realizar incorretamente a leitura do gráfico, trocando, por exemplo, o número de fotocópias com o custo; - Ao adotarem a estratégia de completar a tabela através de cálculos, poderão apresentar dificuldades em aplicar a regra de três simples. **Estratégias 1.2:** - Calcular o quociente entre os valores de y e os de x (ou entre os valores de x e os de y) e justificar a proporcionalidade pelo facto de a razão ser constante; - Justificar a proporcionalidade argumentando que o custo das fotocópias depende diretamente do número de fotocópias, ou seja, se multiplicarmos o custo das fotocópias por um certo valor, o número de fotocópias aumenta na mesma proporção;	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 1.1:** - O que precisas conhecer para completar a tabela? Consegues retirar essa informação do gráfico? - Explica-me como pensaste. -Que dados estão indicados no gráfico? -O que representa o x? -O que representa o y? **Apoio a prestar 1.2:** - Qual o teu raciocínio, explica-me como pensaste? - Existe alguma relação entre o número de fotocópias e o seu custo? - Após os alunos referirem a existência de uma relação entre o número de fotocópias e o seu custo, a professora deverá questionar: O que

	- Recorrer à representação gráfica e indicar que os pontos do gráfico estão “alinhados”, e que o custo aumenta com o número de fotocópias [e que a imagem de zero é zero]. **Dificuldades 1.2:** - Em recordar o que é ser diretamente proporcional; - Por exemplo, determinar a razão apenas entre 6 e 2, e 12 e 4, não contemplando os outros dados; -Não responder ao pedido.	significará o número de fotocópias e o custo serem diretamente proporcionais? - Qual é a constante de proporcionalidade? - Calculando o quociente apenas para esses valores como poderemos garantir que essa razão se mantém sempre?
	Estratégias 1.3: - Utilizar a constante de proporcionalidade e multiplicá-la por 998, $998 \times 3 = 2994$, respondendo que o custo é de 29,94 euros; - Recorrer a uma regra de três simples; **Dificuldades 1.3:** Não se antecipam grandes dúvidas mas os alunos poderão não dar a resposta na unidade pedida (euros).	**Apoio a prestar 1.3:** - O que pretendes determinar? - E se quisesses saber o custo de uma fotocópia? E de 10? -Lê novamente a questão. Em que unidades nos é pedido para dar a resposta? - Um euro corresponde a quantos cêntimos? E um cêntimo corresponde a quantos euros?
	Estratégias 1.4: Designar o número de fotocópias, por exemplo, por x, e o custo por y, recorrendo ao preço unitário (ou à constante de proporcionalidade) e escrever $y = 3x$. **Dificuldades 1.4:** Nesta questão a dificuldade poderá residir na generalização da relação entre o número de fotocópias e o custo das mesmas.	**Apoio a prestar 1.4:** - Como estão relacionadas as duas variáveis? - O gráfico permite-nos saber quanto custa uma fotocópia? E se quiséssemos saber o custo de número qualquer de fotocópias? - Olhando para a tabela, como se relaciona cada valor do custo com o número respetivo de fotocópias? - Qual é a constante de proporcionalidade? - Sugerir que nomeiem as variáveis pelas letras que se encontram no gráfico.
	Estratégias 1.5: - Usar a expressão algébrica da alínea anterior e resolve-la em ordem ao x (número de fotocópias), escrevendo $x = \frac{2500}{3}$ (ou $x = \frac{25}{0.03}$), e concluir que se poderão tirar, no máximo, 833 fotocópias, já que neste contexto n tem de assumir valores naturais; - Recorrer a uma regra de três simples, justificando que, se uma fotocópia custa 3 cêntimos, pretendem determinar o número de fotocópias que custa 2500 cêntimos. **Dificuldades 1.5:** Esta questão poderá representar mais dificuldades para os alunos por se tratar de um raciocínio inverso: - Ao resolver a equação em ordem a uma das variáveis; - Na conversão de euros para cêntimos, ou vice versa, para efetuarem a divisão $25 \div 0.03$ ou $2500 \div 3$; - A interpretar o valor $833.(3)$, resultante da divisão, arredondando-o às décimas ou, arredondando-o por excesso às unidades; -Não apresentar resposta final; -Não responder à questão.	**Apoio a prestar 1.5:** -O que pretendes determinar? -Qual o teu raciocínio, explica-me como pensaste? -Existe alguma expressão que possas utilizar? Qual? - Apoiar o aluno na resolução da equação em ordem ao número de fotocópias, relembrando o que já trabalharam. - Chamar a atenção para as unidades utilizadas na representação gráfica comparativamente aos 25 euros. - Poderás fazer 2,5 fotocópias? Qual será a resposta a esta questão?

5.º - Discussão em grande grupo da questão 1 | 15 minutos

A professora, após dar por concluído o primeiro momento de trabalho autónomo, deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Recordar as representações gráficas e tabular de uma função;
- Realçar como uma situação de proporcionalidade direta pode representar uma função de proporcionalidade direta, que por sua vez, é uma função linear;
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q1.1:** a primeira resolução a apresentar por um aluno oralmente (representando o par de alunos) deverá estar parcialmente correta para que possa ser uma situação exemplificativa de uma leitura incorreta do gráfico, e para que, neste caso, se possa fazer a leitura em grande grupo, tentando colocar todos os alunos nas mesmas condições. A professora deverá realçar que na leitura de um gráfico é fundamental identificar a que corresponde cada um dos eixos, salientando as noções de variável dependente e independente ao questionar, neste caso, qual é a variável independente e qual a variável dependente?

- **Discussão Q1.2:** solicitar a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, garantindo que apresenta uma resposta incompleta, questionando se alguém obteve outra resposta para tentar envolver toda a turma. Este momento terá também como objetivo que os alunos relembrem uma situação de proporcionalidade direta como uma situação em que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, estando o aumento de uma relacionada com o aumento da outra. Deve ser enfatizada a noção de constante de proporcionalidade, como resultante do quociente entre os valores de y e de x.

- **Discussão Q1.3:** a professora solicita a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, que seja exemplificativa do raciocínio da maior parte dos alunos da turma, questionando se alguém pensou de outro modo, com o objetivo de os alunos serem confrontados com outras estratégias. A professora deverá chamar particular atenção para a resposta a este problema que deve ser dada em euros.

- **Discussão Q1.4:** para a apresentação dos resultados desta questão, a professora solicita a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, optando por selecionar um par cuja expressão analítica não esteja correta, para que haja uma proveitosa discussão em grande grupo. Neste confronto entre as expressões analíticas obtidas, a professora deve garantir que será realçado o número de fotocópias como um número inteiro e positivo (natural). Aqui, a professora deverá questionar os alunos se esta representação é uma função, de forma a reforçar este conceito, devendo ainda sublinhar que esta é uma função de proporcionalidade direta e relembrar que também se designa por função linear. Tendo em conta as interações dos alunos, a professora poderá solicitar que os alunos deem outro exemplo de uma função linear.

- **Discussão Q1.5:** na apresentação de resultados desta alínea a professora deverá solicitar a um dos alunos que apresente a resolução do par no quadro, garantindo que apresentam a resposta correta e que faz uma explicação à turma sobre a estratégia de resolução. Já que será espectável que esta questão representar mais dificuldades para a turma, a professora deve fazer uma explicação mais alargada, sublinhando que poderiam recorrer à expressão algébrica determinada na alínea anterior, reforçando, novamente, que o número de fotocópias terá de ser inteiro e como é importante dar uma resposta final a esta questão.

Este momento poderá ser oportuno para reforçar o conceito de função em três representações, gráfica, tabular e algébrica, questionando os alunos sobre que diferentes representações de função conhecem e como nas três representações se observa tratar-se de um função de proporcionalidade direta.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

6.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 2	**| 15 minutos**

A professora circulará pela sala monitorizando o trabalho dos alunos, tentando promover a interação entre os pares de alunos.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
2	**Estratégias 2.1:** Por análise do gráfico, será expectável que os alunos respondam 10 horas. **Dificuldades 2.1:** Não são esperadas dificuldades já que a resposta resulta diretamente da leitura do gráfico, ainda assim, alguns alunos poderão fazê-la incorretamente. **Estratégias 2.2:** - Por análise do gráfico, concluírem que no momento em que estão parados a almoçar a distância percorrida não aumenta. **Dificuldades 2.2:** Não são esperadas muitas dificuldades já que a resposta resulta da observação da representação gráfica. Ainda assim, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Ao realizar incorretamente a leitura do gráfico, por exemplo, trocar as horas com a distância; - Ao não relacionarem a paragem com a função constante; - Ao indicarem o tempo total de paragem, por nesse período a distância percorrida não se alterar. **Estratégias 2.3:** Por análise do gráfico, verificarem que durante o tempo que a família esteve parada, a distância percorrida manteve-se inalterada. Pelo que, como a função é contante das 12 até às 14 horas, a paragem para o almoço durou duas horas. **Dificuldades 2.3:** Na resolução desta alínea não são esperadas muitas dificuldades já que a resposta resulta da observação da representação gráfica. Apesar disso, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Ao realizar incorretamente a leitura do gráfico,	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 2.1:** -Nesta situação, em que eixo observas as horas? -Que trajeto representa o gráfico? - No momento em que a Alice sai de casa que distância já percorreu? **Apoio a prestar 2.2:** - Sempre que se justifique a professora deverá remeter para a leitura do gráfico, já que esta questão é centrada na interpretação desta representação. - Que informação pretendes conhecer? -Em que eixo retiraste a informação necessária? -O que acontece à distância percorrida quando existe uma paragem? **Apoio a prestar 2.3):** - Que informação pretendes conhecer? Que eixo te permitirá retirar essa informação? - Em que eixo retiraste a informação necessária? - O que acontece à distância percorrida quando a família pára para almoçar? - Em que parte do gráfico está representada a paragem para o almoço?

	por exemplo, trocarem as horas com a distância; - Ao não relacionarem a paragem com a função constante; - Ao indicarem as horas a que pararam e as horas que retomaram a viagem; **Estratégias 2.4:** Esta questão é de natureza mais aberta podendo surgir várias respostas: - [Por influência das alíneas anteriores] referem que não houve paragens durante as duas primeiras horas - Na 2ª hora (ou entre as 11 e 12) foram mais depressa do que na 1ª hora - Na 2ª hora percorrem o triplo da distância do que na primeira hora, e, portanto, viajaram a uma velocidade superior. **Dificuldades 2.4:** - Na formulação da resposta e organização da linha de pensamento; - Na leitura e interpretação do gráfico, nomeadamente, associarem os valores da distância percorrida a valores de velocidade do automóvel ou a forma do gráfico à tipologia do terreno; - Ao relacionarem a inclinação das retas com a velocidade a que o carro circula. **Estratégias 2.5:** - Por análise do gráfico, verificarem que a família chegou à Serra da Estrela às 15 horas e como saíram de casa às 10 horas, concluírem que demoraram cinco horas na viagem; - A partir do enunciado e da resposta à questão 2.1, concluírem que a viagem demorou cinco horas. **Dificuldades 2.5:** Na resolução desta alínea não são esperadas muitas dificuldades já que a resposta resulta da observação da representação gráfica ou da leitura do enunciado. Ainda assim, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Ao realizar incorretamente a leitura do gráfico; - Ao não incluírem na resposta o tempo em que a família parou para almoçar. **Estratégias 2.6:** Por análise do gráfico, verificarem que a distância percorrida foi de $240\ km$. **Dificuldades 2.6:** Ainda que esta resposta resulte diretamente da interpretação do gráfico, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Ao realizar incorretamente a leitura do gráfico, por exemplo, trocar as horas com a distância percorrida;	- A que horas se iniciou a paragem? E a que horas foi retomada a viagem? **Apoio a prestar 2.4):** -Em que estão a pensar? - O que podes dizer sobre a 1º hora de viagem? E sobre a 2ª? - Existe alguma diferença na viagem nas duas primeiras horas? - Neste período, houve alguma paragem? - Que distância percorreram na primeira hora? E na segunda hora? **Apoio a prestar 2.5):** - Sempre que necessário, a professora deve remeter para a leitura do gráfico. -Que dados precisam conhecer para saber quanto tempo demorou a viagem? -A que horas iniciou a família da Alice a viagem? - A que horas chegou a família da Alice à Serra da Estrela? **Apoio a prestar 2.6):** - O que pretendemos conhecer? -Em que eixo retiraste a informação necessária? -Que ponto do gráfico representa o momento que a família da Alice chegou à Serra da Estrela? -Nesse ponto, que informações é possível retirar?

	- Ao não relacionarem que o valor máximo da distância percorrida apresentada no gráfico, é a distância total que a Alice percorreu para chegar à Serra da Estrela.	

7.º - Discussão em grande grupo da questão 2 | 10 minutos

A professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Trabalhar a leitura e interpretação de gráficos;
- Promover a comunicação e a escrita matemática.

Quando terminarem os momentos de trabalho autónomo, por parte dos alunos, a professora pedirá a um aluno (representativo do par de alunos) para apresentar oralmente a sua resposta à alínea 2.1., seguindo-se a resolução das alíneas 2.2 e 2.3 que serão explicadas oralmente no quadro, a partir do gráfico, por outro aluno que a professora irá escolher. Em seguida, a professora solicitará a outro aluno da turma indique oralmente aos colegas a sua resposta à alínea 2.4, chamando-o ao quadro para que possa ter o apoio do gráfico projetado. Seguir-se-á a apresentação da alínea 2.5, que será feita por um aluno, a pedido da professora, e, finalmente, outro aluno irá ao quadro apresentar oralmente a sua resolução da alínea 2.5**.** A escolha destes alunos (representativos do par), será feita com base no trabalho anteriormente realizado, a professora ao circular pela sala durante o momento de trabalho autónomo irá ver resoluções distintas e escolherá o aluno com base na resolução que poderá tornar a discussão mais apropriada à aprendizagem dos alunos. Se existirem diferentes resoluções, mas ambas importantes para este momento de discussão, a professora poderá pedir ao outro aluno para expor as diferenças da sua resolução oralmente , sendo que assim a turma beneficiará com a exposição de resoluções distintas.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, mas tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

Neste segmento a professora deve destacar a influência da inclinação das retas ao longo do gráfico e o que representa essa mesma inclinação.

A professora no final deste segmento terá de se certificar que todos os alunos sabem interpretar corretamente um gráfico, podendo questionar alguns pontos importantes que são apresentados, "*Às 11h, qual a distância percorrida?*", "*Dado o valor da distância percorrida, como sabemos a que horas do dia corresponde?*", "*Um dos eixos do gráfico, pode não começar no 0? Porquê*?".

Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

8.º Síntese dos conteúdos | 5 minutos

Nos minutos dedicados à síntese, a professora questionará os alunos sobre o conceito de função e caso persistam dúvidas deverá apresentar mais exemplos. Este será o momento oportuno para discutir com os alunos diferentes tipos de representações que conheçam, nomeadamente, o diagrama de setas, a representação gráfica, a tabular e a expressão analítica. Ainda nesta sistematização, a professora deverá recordar o que foi trabalhado, salientando que uma situação de proporcionalidade direta pode ser traduzida por uma função linear, questionando os alunos: "*Que outro tipo de funções conhecem?",* com o objetivo de que os alunos se recordem das designações de função constante, linear e afim.

9.º Resolução de questões do Caderno de Atividades | 5 minutos

Após o momento de síntese, se ainda restar algum tempo, os alunos realizaram em trabalho autónomo, a pares, as questões 1, 2.1, 2.2 e 2.3 da Ficha diagnóstica 5, do Caderno de Atividades (páginas 75 e 76), com o objetivo de recordar e consolidar os temas trabalhados no 7.º ano, e que serão fundamentais no desenrolar do estudo da subunidade “Gráficos de Funções Afins”. Ao longo destes últimos minutos a professora circulará pela sala monitorizando o trabalho dos alunos, tentando promover a interação entre os pares de alunos e, caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. Considerando os diferentes ritmos de trabalho dos alunos da turma, as questões que não ficarem concluídas em sala de aula, deverão ser realizadas como trabalho de casa.

10.º Encerramento da aula | 5 minutos

Neste último segmento da aula a professora informará os alunos do trabalho para casa, que por sua vez deverão fazer o registo no caderno diário. Este será também o momento oportuno para dar algumas informações acerca da sessão do Circo Matemático a que os alunos irão assistir.

Para trabalho de casa será proposto a conclusão das questões 1, 2.1, 2.2 e 2.3 da Ficha diagnóstica 5 das páginas 75 e 76 do Caderno de Atividades, e, eventualmente, a questão 3 da mesma ficha, considerando os diferentes ritmos de trabalho dos alunos.

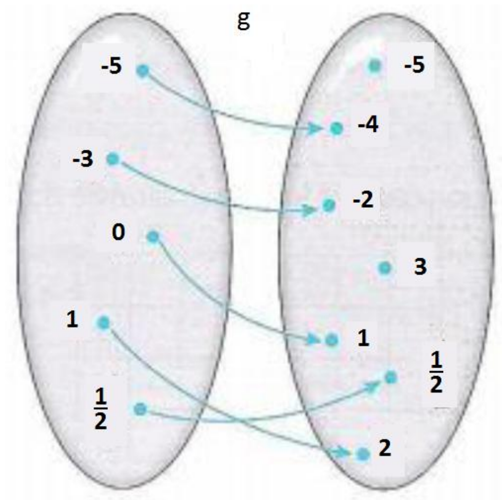
Formas e momentos de avaliação:

Esta aula será pautada por avaliação reguladora quer para a professora quer para os alunos. O primeiro caso, para que a professora possa identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos, permitindo-a refletir sobre a sua própria prática e identificar aspetos que precisem ser melhor consolidados, por parte dos alunos. Através do questionamento a professora tentará aceder ao raciocínio dos alunos, bem como pela intervenção dos alunos na aula, assim como na forma de adesão à tarefa. Enquanto no segundo caso, ao circular pela sala entre os pares de alunos, durante o trabalho autónomo, a professora dará *feedback* aos alunos, privilegiando o questionamento, para que estes se apercebam dos seus raciocínios, aprendizagens e dificuldades.

Para além da avaliação reguladora, existirá o registo para avaliação sumativa da participação e intervenção dos alunos, através do preenchimento de uma grelha. Acrescentando ainda que as resoluções escritas solicitadas aos alunos constituirão elementos informativos à professora acerca da tarefa, isto para que possa ajustá-la em futuras utilizações. Ou seja, este último aspeto será um componente da avaliação formativa da professora.

Matemática 8.º Ano	**Data: 4.abril.2016**
Exemplo	

O diagrama de setas da figura representa uma **função?**



Indica:

(a) O domínio de g.

(b) O contradomínio de g.

(c) O conjunto de chegada.

(d) O objeto que tem por imagem -2.

(e) A imagem do objeto 0.

(f) $g(-5) =$ ______.

(g) $g(\_\_\_) = 2$.

Síntese:

- Dados os conjuntos A e B, uma **função g** de A em B é uma correspondência que a cada elemento do conjunto A (domínio da função) corresponde um e um só elemento do conjunto B (conjunto de chegada).
- Cada elemento do conjunto A designa-se por **objeto**.
- Cada elemento do conjunto B, que corresponde a algum elemento do conjunto A, designa-se por **imagem**.
- O **domínio da função g** é o conjunto de todos os objetos e representa-se por D_g .
- O **contradomínio da função g** é o conjunto de todas as imagens e representa-se por D'_g ou CD_g .
- O **conjunto de chegada** é formado por todos os elementos do conjunto B (que tenham ou não correspondência com os elementos do domínio da função).

Anexo 3.2 – Planificação da 2.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 2.º Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lição 117 — 6 de abril de 2016

Sumário: Resolução da Ficha de Trabalho n.º 2: a função linear.

Duração da aula: 45 minutos

Objetivos:
- Interpretar uma situação de proporcionalidade direta
- Relacionar funções de proporcionalidade direta com funções lineares
- Interpretar a representação gráfica de uma função linear
- Reconhecer e interpretar a constante de proporcionalidade em múltiplas representações
- Reconhecer a imagem de 1 como coeficiente de x
- Resolver problemas com a função linear

Conhecimentos prévios dos alunos:
- A noção de função e conceitos como: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem, objeto
- Reconhecer uma função de proporcionalidade direta, uma função linear, afim ou constante

Recursos para o professor:	Recursos para o aluno:
▪ Ficha de trabalho n.º 2 ▪ Computador e projetor ▪ Manual escolar ▪ Quadro e marcador	▪ Ficha de trabalho n.º 2 ▪ Material de desenho e escrita ▪ Manual escolar

Metodologia de trabalho:
- Introdução da tarefa, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, individual ou a pares (de acordo com a disposição na sala de aula).

Momentos da aula:

Momentos da aula		Tempo previsto (em 45 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	4 min
2.º	Correção do trabalho de casa	5 min
3.º	Discussão de um exemplo e sistematização	8 min
4.º	Apresentação da ficha de trabalho n.º 2	3 min
5.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1	10 min
6.º	Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 1 e síntese	13 min
7.º	Encerramento da aula	2 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças | 4 minutos

Antes do início da aula a professora deverá acautelar o funcionamento do seu computador e do projetor. Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos e ditará o sumário.

2.º - Correção do trabalho de casa	**| 5 minutos**

A professora deverá perguntar aos alunos se existiram dúvidas na resolução do trabalho de casa, e deverá resolver as questões que levantaram dúvidas no quadro, ou oralmente, em grande grupo, com o objetivo de clarificar os alunos. A professora deverá recordar os alunos, que não realizaram o trabalho de casa, que devem fazê-lo porque será um importante elemento de consolidação do que estudaram no 7.º ano.

Nesta discussão os alunos podem revelar dificuldades com a função afim pois ainda não foi recordada em sala de aula, no presente ano letivo. Caso se verifique, a professora deverá fazer uma breve explicação, já que o tema será explorado na aula seguinte.

Neste momento, a colega de estágio irá registar os alunos que realizaram a tarefa proposta para casa.

3.º - Discussão de um exemplo e sistematização	**| 8 minutos**

A professora projetará no quadro branco uma questão, a título de exemplo, que será resolvida e discutida em grande grupo, com o objetivo de analisar as diferentes representações de uma função, observar diferentes representações de uma função de proporcionalidade direta e determinar objetos e imagens a partir da expressão algébrica de uma função de proporcionalidade direta. A professora deverá questionar os alunos sobre o conceito de função e reforçar que a cada objeto corresponde uma única imagem. Nesta discussão, a professora deverá chamar particular atenção para o domínio onde a função está definida, assim como dar ênfase à constante de proporcionalidade nas diversas representações. Após a discussão do exemplo, a professora irá ditar uma pequena síntese das noções trabalhadas, nomeadamente, função de proporcionalidade direta.

4.º - Apresentação da Ficha de Trabalho n.º 1	**| 3 minutos**

Ao distribuir a Ficha de Trabalho por todos os alunos, estes serão informados pela professora do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho. A professora deve informar os alunos que irão trabalhar nos moldes da aula anterior.

A professora solicitará a um aluno que leia para a turma a primeira questão da ficha de trabalho, questionando se existem dúvidas no que leram, solicitando, nesse caso, a outro aluno que explique a situação proposta para o colega. Após este segmento, a professora indicará que os alunos dispõem de 15 minutos para a resolução da ficha e que a esse momento se seguirá uma discussão em grande grupo.

5.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1	**| 10 minutos**

A professora circulará pela sala durante a realização da questão 1, com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades (privilegiando o questionamento), e de monitorizar o seu trabalho, acautelando também possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, evitando validar as suas respostas, e caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. A professora deve ainda atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	**Estratégias 1.1:** - Utilizar a noção de proporção, $\frac{0,6}{1}=\frac{16}{x}$ (onde x representa o número de pães), indicando que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Assim, obtêm $x = 26,(6)$, concluindo que se podem comprar 26 pães; -Reconhecer que as grandezas são diretamente proporcionais e escrever uma expressão algébrica, como por exemplo $y = 0.6x$, em que y representa o custo e x o número de pães. Concluindo que se podem comprar 26 pães; - Indicar que terão de dividir os 16 euros pelo custo de cada pão, obtendo $26,(6)$. Respondendo que poderão comprar 26 pães com 16 euros. - Recorrer ao método da tentativa e erro. **Dificuldades 1.1:** Esta questão pode levantar algumas dúvidas aos alunos já que a resposta não é direta. Alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Ao determinar o valor de x devido a erros de cálculo ou, por incorreta aplicação da regra de três simples ou da proporção; - Na conversão de cêntimos para euros, ou vice-versa; - Ao criticar o valor $26,(6)$, percebendo que apenas poderá comprar 26 pães; -Não apresentar resposta final; -Não responder à questão.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, "*O que achas que é para fazer?*" **Apoio a prestar 1.1:** - Explica-me como pensaste. -Que dados estão indicados no enunciado? - O que pretendes conhecer? -Se tivesses 1 euro quantos pães poderias comprar? E se tivesses 3 euros? - Chamar a atenção para as unidades utilizadas no enunciado, comparativamente aos 16 euros. - Um euro corresponde a quantos cêntimos? E um cêntimo corresponde a quantos euros? - É possível comprar apenas uma parte de um pão? - Qual é a pergunta do enunciado? Já respondeste a essa questão?
	Estratégias 1.2: - Para determinar o custo dos pães os alunos irão observar que o custo de um pão é 60 cêntimos, e multiplicar esse valor pelo número de pães. Neste caso irão calcular $0,6 \times 10 = 6$, $0,6 \times 52 = 31,2$ e $0,6 \times 60 = 36$. Para determinarem a quantos pães corresponde um certo custo, os alunos deverão adotar as mesmas estratégias referidas na alínea anterior, obtendo que: 2 pães custam 1,2; e 23 pães custam 13,8. **Dificuldades 1.2:** Os alunos não deverão revelar muitas dificuldades a calcular o custo de um determinado número de pães, salvo, nas situações em que não realizem conversão de unidades. Para calcular o número de pães comprados, conhecendo o seu custo, as dificuldades serão análogas às da alínea anterior.	**Apoio a prestar 1.2:** Na alínea 1.2, o apoio a prestar aos alunos será semelhante ao da alínea anterior**.**
	Estratégias 1.3: Designar o número de pães, por exemplo, por p, e a função que representa o custo por $f(x)$, recorrendo ao preço unitário (ou à constante de proporcionalidade) e escrever $f(x) = 0,6x$. **Dificuldades 1.3:** -Nesta questão a dificuldade poderá residir na generalização da relação entre o custo e o número de pães comprados; - Alguns alunos poderão ainda indicar uma expressão correta, não nomeando a variável ou a função.	**Apoio a prestar 1.3:** - Como á relacionado o custo dos pães com o número de pães comprados? -Qual é a constante de proporcionalidade? - O enunciado permite-nos saber quanto custa um pão? E se quiséssemos saber o custo de número qualquer de pães? - Como é que varia o custo dos pães? Se comprar um pão quanto pago? E se comprar dois? - Sugerir que nomeiem as variáveis.
	Estratégias 1.4: Os alunos identificam o eixo das abcissas como referente ao número de pães comprados, e o das ordenadas como o custo (em euros), marcando os pontos (2; 1,2), (10; 6), (23; 13,8), (52; 31,2) e (60; 36), designando este gráfico por f. **Dificuldades 1.4:**	**Apoio a prestar 1.4:** - Sugerir uma quadrícula como 5 unidades, para o número de pães e, como 2 unidades, para o custo. - Qual é a variável independente? E a

	- Ao identificar o número de pães como a variável dependente; - Escolher a escala dos eixos do referencial; - Não designar a função por f, ou não nomear os eixos; -Unir os pontos traçando uma reta.	dependente? -Podemos comprar 10,3 pães?
	Estratégias 1.4.1: -Indicar um dos pontos obtidos na tabela, relacionando desta forma que esses pontos pertencem à função; -Por observação do gráfico obtido retirar um ponto; - A partir do custo unitário ser 60 cêntimos, escolher um ponto proporcional, por exemplo, (2; 1,2). **Dificuldades 1.4.1:** Não são esperadas muitas dificuldades, mas algumas das dificuldades que podem surgir são: - Relacionar que todos os pontos que pertencem ao gráfico são solução; - Pensar que, para que um ponto para pertença, ao gráfico, basta pertencer à função e, portanto, satisfazer $f(x) = 0{,}6x$.	**Apoio a prestar 1.4.1:** - O que significa um ponto pertencer ao gráfico da função f? - O que é que já obtivemos nas alíneas anteriores? - Indica-me, no referencial, um ponto por onde o gráfico passe.
	Estratégias 1.4.2: Observar que não será possível comprar 70 pães porque, diariamente, a padaria apenas dispõe de 60 pães. **Dificuldades 1.4.2:** -Responder negativamente por (70;42) não se encontrar no gráfico, nem na tabela; -Recorrer à expressão algébrica, verificando a igualdade $42 = 0{,}6 \times 70$.	**Apoio a prestar 1.4.2:** - Nesta situação, o que significa o ponto (70;42)? -É possível comprar 70 pães? - Sugerir que o aluno releia o enunciado inicial.
	Estratégias 1.4.3: **-** Usar a expressão analítica da alínea anterior e resolve-la em ordem ao x (número de pães), escrevendo $x = \frac{4{,}5}{0{,}6} = 7{,}5$ (ou recorrendo aos valores em cêntimos), e concluir que não é possível metade de um pão, portanto a Alice não poderá pagar 4,5 euros pela comprar de pão; -Recorrer às estratégias utilizadas na alínea 1.1. **Dificuldades 1.4.3:** -Ao resolver a expressão em ordem a uma das variáveis; -Análogas às da alínea 1.1.	**Apoio a prestar 1.4.3:** - O que pretendes determinar? - Existe alguma expressão que possas utilizar? Qual? - Apoiar o aluno na resolução da equação em ordem a uma das incógnitas. - É possível comprar só uma parte do pão?
	Estratégias 1.4.4: **-** Os alunos irão indicar que é um gráfico de pontos que traduz o custo em função do número de pães comprados, e que representa uma situação de proporcionalidade direta. **Dificuldades 1.4.4:** Alguns alunos poderão não estar familiarizados com os gráficos de pontos, podendo surgir algumas dificuldades: - Caso tenham representado uma reta na alínea 1.6; - E não respondam à questão.	**Apoio a prestar 1.4.4:** - O que significa o ponto (2;1,2)? -Que situação representa este gráfico? -Se não forem comprados pães, qual é custo? -Esta representação é uma reta?

6.º - Discussão em grande grupo da questão 1 | 10 minutos

A professora, após dar por concluído o momento de trabalho autónomo, deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Recordar as representações gráfica, tabular e algébrica de uma função, em particular de uma função de proporcionalidade direta (atendendo especialmente ao seu domínio);
- Realçar como uma situação de proporcionalidade direta pode representar uma função de proporcionalidade direta

- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação, escrita e o raciocínio matemático.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q1.1:** A professora pedirá a um aluno (como representante do par) que responda oralmente e explique aos colegas a sua resposta, questionando à restante turma se alguém obteve outro resultado, ou que não tenha conseguido resolver a questão. A professora deve garantir que todos os alunos acompanham o raciocínio mas não deve ser feita uma exploração exaustiva para não influenciar o raciocínio na alínea 1.2.
- **Discussão Q1.2:** A professora solicita a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, garantindo que apresenta uma resposta incompleta, questionando se alguém obteve outra resposta para tentar envolver toda a turma. A professora terá que se certificar que todos os alunos percebem o raciocínio quando é dado o número de pães, mas principalmente quando é dado o custo, pois espera-se mais dificuldades.
- **Discussão Q1.3:** A professora solicita a um dos alunos que apresente a resolução do par no quadro, garantindo que apresentam a resposta correta e que faz uma explicação à turma sobre a estratégia de resolução. Já que é esperado que esta questão represente mais dificuldades, a professora deve fazer uma explicação mais alargada, reforçando que é uma função de proporcionalidade direta e, portanto, será da forma $y = kx$, onde k representa a constante de proporcionalidade, dando destaque ao domínio desta função. Deve ser enfatizada a noção de constante de proporcionalidade, como resultante do quociente entre os valores de y e de x.
- **Discussão Q1.4:** Um dos alunos é chamado pela professora ao quadro para marcar os pontos sobre a projeção do referencial, explicando como procedeu. A professora deverá sublinhar a que eixo está associada cada uma das variáveis, utilizando também a noção de variável dependente e independente.
- **Discussão Q1.4.1:** A professora deverá escolher um aluno para responder oralmente, pedindo para que explique aos colegas a obtenção da sua resposta. A professora também deve reforçar que existem 60 pares de pontos possíveis, pois o domínio da função são os números naturais até 60.
- **Discussão Q1.4.2:** A professora deve solicitar a um aluno que responda oralmente. Certificando-se que toda a turma percebe que apesar de, se comprarmos 70 pães pagaremos 42 euros, mas que a loja não tem 70 pães (não pertence ao domínio) e só por esta razão é que o ponto não pertence ao gráfico de f.
- **Discussão Q1.4.3:** Análoga à Q1.1.
- **Discussão Q1.4.4:** A professora solicitará a alguns alunos que indiquem as suas respostas oralmente, e depois deverá fazer uma explicação mais alargada, ao explicitar que é o gráfico de uma função de proporcionalidade direta uma vez que os pontos estão alinhados sobre uma reta imaginária que passa na origem do referencial. A professora deverá também destacar que $f(0) = 0$ e referir que f(1)=k, sendo k a constante de proporcionalidade.

Neste segmento a professora deve permanentemente questionar os alunos se existem dúvidas e se resolveram alguma das questões de outro modo, na tentativa de que todos os alunos participem na discussão dos resultados. No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

Nos minutos finais desta discussão a professora irá retomar o primeiro exemplo apresentado na aula (função de proporcionalidade direta), estendendo o domínio da função que os alunos trabalharam

($\boldsymbol{D_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}}$) a $\mathbb{R}$. A professora tem como objetivo que os alunos recordem a função linear ao destacar que o conjunto dos pontos do gráfico (inicialmente apresentado) se sobrepõem a uma linha imaginária que passa na origem do referencial, e que, $f(0) = 0$ e f(1)=k, em que k é a constante de proporcionalidade. Finalmente, a professora ditará uma síntese acerca da função linear que os alunos deverão registar no caderno diário.

7.º Encerramento da aula	**| 2 minutos**

Neste último segmento da aula a professora deverá devolver aos alunos as fichas de trabalho recolhidas na aula anterior, e relembrar aos alunos que não resolveram o trabalho de casa (da aula passada) que devem fazê-lo (a conclusão das questões 1, 2.1, 2.2 e 2.3 da Ficha diagnóstica 5 das páginas 75 e 76 do Caderno de Atividades).

Será ainda feita uma proposta de trabalho de casa, que os alunos devem registar no caderno: a questão 3 da página 76 do Caderno de Atividades.

Formas e momentos de avaliação:

Esta aula será pautada por avaliação reguladora quer para a professora quer para os alunos, à semelhança da aula anterior. A professora tem como objetivo identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos, permitindo-a refletir sobre a sua própria prática e identificar aspetos que precisem ser melhor consolidados, por parte dos alunos. Através do questionamento a professora tentará aceder ao raciocínio dos alunos, bem como pela intervenção dos alunos na aula, assim como na forma de adesão à tarefa. Ao circular pela sala entre os pares de alunos, durante o trabalho autónomo, a professora dará *feedback* aos alunos, privilegiando o questionamento, para que estes se apercebam dos seus raciocínios, aprendizagens e dificuldades.

Na mesma linha da aula anterior, para além da avaliação reguladora, existirá o registo para avaliação sumativa da participação, intervenção dos alunos e realização do trabalho de casa, através do preenchimento de uma grelha. Acrescentando ainda que, as resoluções escritas solicitadas aos alunos constituirão elementos informativos à professora acerca da tarefa, ou seja, será um componente da avaliação formativa da professora.

Anexo 3.3 – Planificação da 3.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 3.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 118 e 119 | 7 de abril de 2016

Sumário: Resolução da Ficha de Trabalho n.º3: a função afim.

Duração da aula: 90 minutos

Objetivos:
- Representar algebricamente e graficamente uma função afim
- Relacionar funções lineares com funções afins
- Reconhecer o gráfico de uma função afim como a translação do gráfico de uma função linear segundo um vetor
- Reconhecer a imagem de um como coeficiente de x , dada uma função linear
- Identificar que as retas não verticais que passam na origem representam gráficos de funções lineares
- Resolução de problemas com as funções linear e afim

Conhecimentos prévios dos alunos:
- A noção de função e conceitos como: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto
- Reconhecer uma função de proporcionalidade direta, uma função linear
- Determinar a constante de proporcionalidade

Recursos para o professor:	**Recursos para o aluno:**
▪ Ficha de trabalho n.º 3 ▪ Computador e projetor ▪ Manual escolar ▪ Quadro, marcador e régua	▪ Ficha de trabalho n.º 3 ▪ Material de desenho e escrita ▪ Manual escolar

Metodologia de trabalho:
- Introdução da tarefa, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, individual ou a pares (de acordo com a disposição na sala de aula).

Momentos da aula:

Momentos da aula		**Tempo previsto** (em 90 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	4 min
2.º	Correção do trabalho de casa	10 min
3.º	Apresentação da ficha de trabalho n.º 3	4 min
4.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1	15 min
5.º	Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 1	15 min
6.º	Sistematização com o GeoGebra	10 min
7.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 2	15 min
8.º	Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 2	15 min
9.º	Síntese dos conteúdos	5 min
10.º	Encerramento da aula	2 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças	**| 5 minutos**

Antes do início da aula a professora deverá acautelar o funcionamento do seu computador e do projetor.

Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos e ditará o sumário.

2.º - Correção do trabalho de casa	**| 10 minutos**

A professora deverá perguntar aos alunos se existiram dúvidas na resolução do trabalho de casa, enquanto projeta a ficha no quadro. Todas as questões deverão ser discutidas em grande grupo:

- As alíneas 1.1 e 1.2 devem ser discutidas oralmente enquanto a professora escreve as respostas no quadro. A professora deve atender especialmente aos casos em que, dado o custo, é necessário determinar o número de pães, pedindo aos alunos que partilhem as suas justificações. Deverão ser reforçadas as noções de variável independente e dependente, neste contexto.

- A alínea 1.3 deverá ser resolvida por um aluno no quadro e a sua resolução deve ser discutida em grande grupo. Nesta interação a professora deverá reforçar que esta é uma função de proporcionalidade direta e, portanto, será da forma $y = kx$, onde k representa a constante de proporcionalidade, dando destaque ao domínio desta função. Deve ainda ser enfatizada a noção de constante de proporcionalidade, como resultante do quociente entre os valores de y e de x.

- A alínea 1.4 deverá ser discutida oralmente, como o referencial projetado no quadro, e nestas interações a professora deverá sublinhar a que eixo está associado cada uma das variáveis, utilizando também a noção de variável dependente e independente.

- Na discussão oral da 1.4.1 um aluno deve explicar a sua resposta e a professora deve reforçar que existem 61 pares de pontos possíveis, pois o domínio da função são os números naturais até 60, incluindo o zero.

- Na discussão da 1.4.2, um aluno irá expor oralmente a sua resposta, explicando-a aos colegas. A professora deverá certificar-se que toda a turma percebe que, apesar de, se comprarmos 70 pães pagarmos 42 euros, na loja não existem tem 70 pães (não pertence ao domínio) e só por esta razão (o contexto da situação) é que o ponto não pertence ao gráfico de f.

- Um aluno deverá ir ao quadro apresentar a resposta à 1.4.3, explicando-a. A professora deverá recordar a expressão algébrica da função e frisar que seria uma possibilidade na resolução.

- Na discussão da 1.4.4 a professora solicitará a alguns alunos as suas respostas, fazendo depois notar que este é o gráfico de uma função de proporcionalidade direta uma vez que os pontos estão alinhados sobre uma reta imaginária que passa na origem do referencial. A professora deverá também destacar que $f(0) = 0$ e referir que f(1)=k, sendo k a constante de proporcionalidade.

Nos minutos finais desta discussão a professora irá retomar o primeiro exemplo apresentado na aula anterior (função de proporcionalidade direta), estendendo o domínio da função que os alunos trabalharam $(\boldsymbol{D_f} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\})$ a $\mathbb{R}$. A professora tem como objetivo que os alunos recordem a função linear ao destacar que o conjunto dos pontos do gráfico (inicialmente apresentado) se sobrepõem a uma linha imaginária que passa na origem do referencial, e que, $f(0) = 0$ e f(1)=k, em que k é a constante de proporcionalidade. Finalmente, a professora ditará uma síntese acerca da função linear que os alunos deverão registar no caderno diário, enquanto distribui a ficha de trabalho n.º 3.

3.º - Apresentação da Ficha de Trabalho n.º 3	**| 4 minutos**

Neste momento, a colega de estágio irá registar os alunos que realizaram a tarefa proposta para casa.

Ao distribuir a Ficha de Trabalho por todos os alunos, estes serão informados pela professora do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho. A professora deve informar os alunos que irão trabalhar nos moldes da aula anterior.

A professora solicitará a um aluno que leia para a turma a primeira questão da ficha de trabalho, que estará projetada no quadro, questionando se existem dúvidas no que leram, solicitando, nesse caso, a outro aluno que explique a situação proposta para o colega. Após este segmento, a professora indicará que os alunos dispõem de 15 minutos para a resolução da ficha e que a esse momento se seguirá uma discussão em grande grupo.

4.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1 | 15 minutos

A professora circulará pela sala com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades (privilegiando o questionamento), e de monitorizar o seu trabalho, acautelando possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, evitando validar as suas respostas, e caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. A professora deve ainda atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	**Estratégias 1.1:** - Responder à questão por observação do gráfico, identificando $2{,}40€$ como o custo de $3Kg$ de laranjas e $5{,}60€$ como o custo de $4Kg$ de bananas. Obtendo $8€$ $(2{,}40 + 5{,}60)$ como o custo total. **Dificuldades 1.1:** Não são esperadas muitas dificuldades já que a resposta resulta da observação da representação gráfica. Ainda assim, alguns alunos poderão indicar: - apenas o custo da quantidade de fruta, isoladamente, ao invés de somar os dois custos; - o custo da quantidade de fruta, por aproximação, conjeturando o valor por observação gráfica. **Estratégias 1.2:** - Calcular $\frac{5{,}60}{2}$, obtendo que o custo de 2Kg de bananas é 2,80€; e calcular $\frac{2{,}40}{2}$, obtendo que 0,80€ é o custo de 1Kg de laranjas. Finalmente, somar esses valores e indicar que 3,60€ será o custo de 2Kg de bananas e 1Kg de laranjas. - Em alternativa ao primeiro raciocínio poderão calcular $\frac{5{,}60}{4}$, obtendo que o custo de 1Kg de bananas é 1,40€; e calcular $\frac{2{,}40}{2}$, obtendo que 0,80€ é o custo de 1Kg de laranjas, resultando $2 \times 1{,}40 + 0{,}80 = 3{,}60$. **Dificuldades 1.2:** Análogas a 1.1. **Estratégias 1.3:** - Utilizar uma proporção, por exemplo, $\frac{1}{0{,}8} = \frac{p}{6}$, em seguida multiplicar os extremos e igualar ao produto dos meios. -Tentativa e erro. **Dificuldades 1.3:** Esta questão poderá representar mais dificuldades para os alunos por se tratar de um raciocínio inverso: - Ao aplicar a regra de três simples; -Ao resolver a expressão em ordem ao peso (p).	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 1.1:** - Que informação consegues retirar do gráfico? - O que pretendes saber? O cliente comprou só laranjas ou só bananas? - Tens a garantia que esse gráfico está feito à escala? **Apoio a prestar 1.2:** - O que pretendes saber? - Que informação consegues retirar do gráfico? -O cliente comprou só laranjas ou só bananas? **Apoio a prestar 1.3:** - O que pretendes determinar? -Qual o teu raciocínio, explica-me como pensaste?

	-Não apresentar resposta final/não responder à questão.	
	Estratégias 1.4: Designar o peso por p, e o custo por c, recorrendo ao preço por quilograma (ou à constante de proporcionalidade) e escrever $f(p) = 0{,}8p$ para as laranjas e $g(p) = 1{,}4p$ para as bananas. **Dificuldades 1.4:** -Generalização da relação entre o peso dos frutos e o custo dos mesmos; - Nomeação das variáveis e das funções.	**Apoio a prestar 1.4:** - Como estão relacionadas as duas variáveis? -Qual é o custo de um quilograma de laranjas/bananas? -E se quiséssemos saber o custo uma quantidade qualquer de laranjas/bananas? - Qual é a constante de proporcionalidade? - Sugerir que nomeiem as variáveis pelas letras que se encontram no gráfico, atendendo às designações das funções.
	Estratégias 1.5.a): **-** Referir que ambas as representações gráficas passam na origem do referencial e que são semirretas (ou que são pontos alinhados segundo uma reta); -Indicar que são funções lineares de constante igual ao preço por quilograma de laranjas/bananas; -Referir que o custo varia em função do peso, em ambas as funções f e g. **Dificuldades 1.5.a):** - Em expressar as semelhanças entre as funções. **Estratégias 1.5.b):** -Observar que a representação gráfica de g tem maior inclinação em relação ao eixo do xx que f (diferem na inclinação); - As suas expressões diferem na constante de proporcionalidade (ou na constante da função). **Dificuldades 1.5.b):** - Em expressar as semelhanças entre as funções.	**Apoio a prestar 1.5.a) e b):** -Quais são as funções f e g? **-**Sugerir que observe o gráfico. -As funções f e g são de algum modo parecidas/distintas?
	Estratégias 1.6: -Responder que é falsa por f e g serem lineares (justificando pela expressão algébrica ou por observar que os gráficos passam na origem) -Indicar que não são constantes porque o custo aumenta com o peso; - Justificar que as retas não são horizontais. **Dificuldades 1.6:** -Em recordar o que é uma função constante; -Ao responder que a afirmação é verdadeira; -Não justificar.	**Apoio a prestar 1.6:** -Como é que estás a pensar? -Como é uma função constante? -O peso das laranjas/bananas é sempre o mesmo?
	Estratégias 1.7.a) e b): - Responder à questão por observação do gráfico, identificando 2,40€ como o custo de $3Kg$ de laranjas e somar 2€ , obtendo 4,40€. Finalmente, indicar na alínea b) que se pagará 2,40€, sem entrega ao domicílio, e que a diferença entre os valores pagos é de 2€. **Dificuldades 1.7.a):** -Ao apresentar o resultado sem somar os 2€ de custo fixo. **Dificuldades 1.7.b):** -Não são esperadas grandes dificuldades, a não ser que respondam incorretamente à alínea anterior.	**Apoio a prestar 1.7.a) e b):** -Nesta situação o cliente só paga o custo das laranjas? -Qual é o custo da entrega ao domicílio?
	Estratégias 1.7.c): - Designar o peso por p, e a função que representa o custo	**Apoio a prestar 1.7.c):** - Como estás a pensar? - Como á relacionado o custo das laranjas

	por $j(x)$, recorrendo ao preço por quilograma (ou à constante de proporcionalidade), adicionar os 2€ de custo fixo e escrever $j(x) = 0,8x$+2. **Dificuldades 1.7.c):** -A a dificuldade poderá residir na generalização da relação entre o custo e a quantidade de fruta; - Alguns alunos poderão ainda indicar uma expressão incorreta, nomeando a variável por x, por exemplo. **Estratégias 1.8:** Identificar o eixo das abcissas com o peso e o das ordenadas com o custo, identificar dois pontos que pertençam a cada uma das funções f e j, marcá-los e uni-los dois a dois. Os alunos poderão revelar cuidado ao marcar as semirretas, com a consciência que as funções estão definidas apenas para valores positivos ou nulos. **Dificuldades 1.8:** Esta questão poderá levantar algumas dificuldades, alguns alunos podem revelar dificuldades: - Ao representar a reta também para valores negativos; - Em identificar pontos para traçar as retas; -Ao nomear os eixos e/ou as representações; - Em definir uma escala para os eixos. **Estratégias 1.8.1:** Os alunos poderão indicar que as retas são paralelas ou que têm a mesma inclinação. **Dificuldades 1.8.1:** -Caso tracem mal as representações poderão tirar outras conclusões. **Estratégias 1.9:** Indicar que as funções f e j têm o mesmo coeficiente. **Dificuldades 1.9:** -Ao indicar que as funções f e j têm a mesma constante de proporcionalidade.	com a quantidade (em quilogramas) comprada? Só importa o peso da fruta? - Quanto custam 3Kg sem entrega ao domicílio? E com entrega? - Sugerir que nomeiem as variáveis de acordo com o observado no enunciada. **Apoio a prestar 1.8:** -Qual é a variável dependente? E a independente? -Qual das representações corresponde ao custo com entrega ao domicílio? -Neste contexto, é possível termos custos negativos ou pesos negativos? - Sugerir, por exemplo, que duas quadrículas correspondam a uma unidade, em ambos os eixos. **Apoio a prestar 1.8.1:** -Qual das representações corresponde ao custo, com entrega ao domicílio? Qual é o custo dessa entrega? - Um cliente pagará o mesmo nas duas situações se comprar a mesma quantidade de laranjas? Porquê? **Apoio a prestar 1.9:** -As funções f e j são do mesmo tipo? Como se chama a uma função do tipo da f? E da j? - Que características semelhantes têm as expressões? Que características distintas apresentam?

5.º - Discussão em grande grupo da questão 1 | 15 minutos

Após dar por concluído o primeiro momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Interpretar funções lineares e afins
- Representar algebricamente e graficamente uma função afim
- Relacionar funções lineares com funções afins
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q1.1:** Um aluno apresenta oralmente a sua resposta, a pedido da professora, justificando-a. A leitura do gráfico, que estará projetado no quadro, deve ser reforçada em grande grupo e a professora deverá realçar a importância de identificar os eixos do referencial, questionando: *Qual é a variável independente? E a variável dependente?* Os alunos devem identificar o peso como a variável independente e o custo como variável dependente.

- **Discussão Q1.2:** Um aluno apresenta a resolução do par oralmente, explicando para toda a turma, enquanto a professora faz o registo da resposta no quadro. A professora questionará se alguém obteve outra resposta, com o objetivo de discutir outras estratégias, e deverá evidenciar que teremos de somar o custo das bananas e das laranjas (fazendo alusão ao conector e como indicador de soma).
- **Discussão Q1.3:** A professora solicita a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, que seja exemplificativa do raciocínio da maior parte dos alunos da turma, questionando se alguém pensou de outro modo, com o objetivo de discutir outras estratégias. Deverá ser dada particular atenção à resposta a esta questão, já que no contexto desta situação é possível comprar $7{,}5Kg$ de laranjas.
- **Discussão Q1.4:** Na apresentação dos resultados desta questão, a professora solicita a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, optando por selecionar um par cujas expressões analíticas estejam incompletas ou parcialmente corretas para que se possa discutir a constante de proporcionalidade em ambos os casos (laranjas e bananas). A professora deverá questionar os alunos se esta representação é uma função, de forma a reforçar este conceito, devendo ainda sublinhar que esta é uma função de proporcionalidade direta e relembrar que também é também uma função linear. Face às interações dos alunos poderão surgir logo conclusões das alíneas seguintes, como por exemplo, associar uma maior constante de proporcionalidade a uma maior inclinação da semirreta.

Discussão Q1.5.a) e b): Esta questão pode originar uma discussão rica em intervenções por parte dos alunos, já que poderá suscitar diversos comentários sobre as características gráficas ou algébricas das funções f e g. A professora deverá solicitar a dois ou três alunos que participem oralmente, de forma ordeira, e deve registar no quadro as intervenções dos alunos. No final, deverá ficar claro para os alunos que são ambas funções do tipo $h(x) = kx$ (em que k é a constante de proporcionalidade) com o mesmo domínio, que a representação gráfica mais inclinada está relacionada com uma maior constante de proporcionalidade e que a imagem de 0 é 0, para ambas as funções, isto é, ambas passam na origem do referencial. Reforçando que o coeficiente da função linear é igual ao ponto do gráfico com abcissa igual a 1, ie, é a imagem de f(1) e portanto f(1) é a constante de proporcionalidade.

- **Discussão Q1.6:** Outro aluno é chamado pela professora a participar oralmente, que depois questionará se existem outras justificações. Aqui, a professora deverá em interação com os alunos destacar que para diferentes pesos o custo não é constante, recordando, nesse momento, as expressões algébricas indicadas anteriormente e que a imagem de 0 é 0, para ambas as funções. Para concluir, a professora deverá questionar se os alunos se recordam da designação que deram a funções daquele tipo no final da aula anterior.
- **Discussão Q1.7.a) e b):** A resposta a estas alíneas deverá ser dada oralmente por um aluno, que por sua vez deverá explicar como o par pensou. Nesta discussão a professora deverá enfatizar o custo fixo, de dois euros, da entrega ao domicílio, a s sua influência no custo final.
- **Discussão Q1.7.c):** Ao pedir a um aluno que apresente a resolução no quadro, a professora deve assegurar que o aluno explica o raciocínio do par à turma. Neste segmento, a professora deve chamar à atenção para a nomeação das variáveis em causa, bem como para o facto de adicionarmos um valor fixo (constante) ao custo das laranjas. A professora deverá ter o cuidado de não explorar esta questão exaustivamente para não influenciar a resposta às alíneas seguintes, ainda assim, deverá questionar os alunos se se recordam que nome se dá a uma função daquele tipo, função afim.
- **Discussão Q1.8:** A professora chamará um aluno ao quadro para explicar a resolução do par, com a garantia que o aluno fez a representação de forma correta. Aqui, em interação com os alunos, a professora deverá destacar a nomeação dos eixos (o eixo das abcissas representa o peso e o das ordenadas o custo), dando ênfase à escolha de pontos para traçar a semirreta. A professora deve questionar a turma: *"Como poderemos representar graficamente esta função?"*, *"O que precisamos*

conhecer para traçar uma reta?". Posto isto, as interações deverão ser no sentido de levar os alunos a perceber que precisam calcular a imagem de dois objetos distintos através da expressão algébrica (para cada uma das funções) obtendo dois pares ordenados. Ao marcar os referidos pares no referencial, que estará projetado no quadro, devem uni-los, atendendo ao domínio de cada função.

- **Discussão Q1.8.1:** No seguimento da alínea anterior, um outro aluno deve expor a resposta do par oralmente, e a discussão deve ser mediada pela professora com o objetivo de observar que as semirretas são paralelas, ou seja, que as representações gráficas de f e j têm a mesma inclinação apesar de uma passar na origem do referencial e outra não. Este será o momento oportuno para que a professora questione: *Existe alguma transformação que nos permita partir da representação da função f para a j?* A professora deverá projetar um ficheiro GeoGebra com estas representações e mostrar, em interação com os alunos, que estas duas representações (com o auxilio de um seletor) são paralelas e que j resulta de f pela translação segundo o vetor $(0,2)$. Aqui a professora deve notar que a extremidade do vetor coincide com o ponto onde j interseta o eixo referente ao custo.
- **Discussão Q1.9:** Finalmente, a professora deverá questionar outro par de alunos relativamente às expressões algébricas de f e j. O par deverá explicar oralmente para a restante turma a sua justificação que poderá ser complementada com outras intervenções de alunos, a pedido da professora. A professora deverá chamar a atenção dos alunos o que difere nas duas expressões: a soma de uma constante, 2. Aqui, poderá ser oportuno evidenciar que a representação gráfica se "deslocou" duas unidades, isto é, o custo das laranjas com entrega ao domicílio aumenta dois euros no custo final, independentemente da quantidade que se comprar. Será natural que os alunos façam diversas questões, às quais a professora deverá responder, tentando não fugir do objetivo desta questão.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

6.º - Sistematização com o GeoGebra	**| 10 minutos**

Ao articular este segmento com as funções f e j discutidas anteriormente, a professora deverá questionar: *Que nome dão a uma função que seja do tipo da f? E se for como a j?.* Face às interações dos alunos, a professora deverá recordar a função afim, pedindo aos alunos que registem no caderno diário esta noção, que será ditada. Antes de avançar será importante esclarecer as dúvidas que surjam.

Em seguida, a professora projetará no quadro um ficheiro GeoGebra com o intuito de que os alunos observem o gráfico de uma função afim, a partir de uma função linear, por translação de um vetor. A professora deverá tirar partido das potencialidades deste recurso para que os alunos observem o paralelismo entre estas duas retas. Assim, deve enfatizar que o gráfico de uma função linear passa no ponto de coordenadas (0,0), e o gráfico de uma função afim (paralela à linear) passa no ponto (0,b), [para valores positivos ou negativos de b].

Ainda neste segmento, a professora deverá referir que a função afim se obtém da linear, somando-lhe uma constante. Assim, deverá questionar: *Existirá a função constante? Como se representa?* A professora deve apresentar exemplos de funções constantes e ditar aos alunos a sua expressão geral, para que estes registem no caderno.

Depois de a professora reforçar estes aspetos deve questionar se existem dúvidas e pedir aos alunos que copiem para o caderno o texto do retângulo verde da página 166 do manual escolar.

7.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 2	**| 15 minutos**

A professora circulará pela sala monitorizando o trabalho dos alunos, tentando promover a interação entre os pares de alunos.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
2	**Estratégias 2.1:** Completarem a tabela, utilizando os dados apresentados no enunciado: - O custo mensal do tarifário F é obtido através da soma do custo fixo com 12 cêntimos por minuto de conversação. Obtendo assim: $3 + 0{,}12 \times 45 = 8{,}4€$; $3 + 0{,}12 \times 90 = 13{,}8€$; $3 + 0{,}12 \times 223 = 29{,}76€$. - O custo mensal do tarifário G é obtido através da soma do custo fixo com 5 cêntimos por minuto de conversação. Obtendo assim: $7 + 0{,}05 \times 30 = 8{,}5€$; $7 + 0{,}05 \times 90 = 11{,}5€$; $7 + 0{,}05 \times 223 = 18{,}15€$. **Dificuldades 2.1:** Não são esperadas dificuldades já que a resposta resulta de um cálculo direto. Ainda assim, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Em perceber que para cada tarifário os valores são distintos; - Ao não fazerem a conversação do custo variável para euros. Calculando desta forma uma soma com duas unidades diferentes.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 2.1:** -Qual o custo do Tarifário F? E do tarifário G? - O que distingue um custo fixo de um custo variável? - Em que unidades está cada custo? - Em que unidades é pedida a resposta?
	Estratégias 2.2: - O custo depende do número de minutos e tal é observado na alínea anterior ao completar a tabela. Portanto, será expectável que os alunos respondam que a variável dependente é o custo e a variável independente é o número de minutos. **Dificuldades 2.2:** Não são esperadas muitas dificuldades. Ainda assim, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Na nomenclatura utilizada; - Trocarem as duas variáveis.	**Apoio a prestar 2.2:** - O que significa variável dependente? E variável independente? - O que vamos pagar depende do quê? - Como completamos a tabela anterior?
	Estratégias 2.3: Por observação da tabela da Questão 2.1, $g(30) = 8{,}5€$ e que será o custo do tarifário G com 30 minutos de conversação. **Dificuldades 2.3:** Na resolução desta alínea não são esperadas muitas dificuldades já que a resposta resulta da observação da tabela. Ainda assim: - Ao relacionar que $g(30)$ é o custo de 30 minutos de conversação ao utilizar o tarifário G.	**Apoio a prestar 2.3):** - O que significa $g(30)$? - Qual é a função g? - O que já respondemos anteriormente?
	Estratégias 2.4: Esta questão relaciona linguagem corrente com matemática. Como tem um custo fixo, será esperado que os alunos respondam que são funções afins. **Dificuldades 2.4:** São esperadas algumas dificuldades. Tais como: - Saberem distinguir os três tipos de função; - Não relacionarem o custo fixo com a ordenada na origem;	**Apoio a prestar 2.4):** - O que é uma função constante? E linear? E afim? - O que significa ter um custo fixo?

	- Não conseguirem explicar a sua resposta. **Estratégias 2.5:** Após realizarem as questões 2.1 e 2.4, é expectável que os alunos respondam $f(x) = 3 + 0{,}12x$ e $g(x) = 7 + 0{,}05x$. **Dificuldades 2.5:** Na resolução desta alínea só são esperadas mais dificuldades se os alunos não tiverem respondido corretamente à alínea anterior. Algumas das dificuldades poderão ser: - Não saberem a expressão algébrica de uma função afim; - Não relacionarem o custo fixo com o *b* (termo independente) e o custo variável com o *a* (coeficiente de x).	**Apoio a prestar 2.5):** - Como é a expressão algébrica de uma função afim? - Que procedimentos utilizámos para completar a tabela? - Como obtemos o custo total? - O custo variável depende do quê?
	Estratégias 2.6.1: Por análise da expressão algébrica: coeficiente de x é 0,12 e o termo independente é 3 **Dificuldades 2.6.1:** Não são esperadas dificuldades pois esta resposta sai por observação direta da expressão algébrica. Ainda assim poderão surgir dificuldades: - Ao colocar o coeficiente de x como 0,12*x* **Estratégias 2.6.2:** Por análise da expressão algébrica: coeficiente de x é 0,05 e o termo independente é 7. **Dificuldades 2.6.2:** Não são esperadas dificuldades pois esta resposta sai por observação direta da expressão algébrica. Ainda assim poderão surgir dificuldades: - Ao colocar o coeficiente de x como 0,05*x*	**Apoio a prestar 2.6):** - O que é o coeficiente de x? E o termo independente?
	Estratégias 2.7: Recorrendo às expressões algébricas, substituir em ambas o x por 75. Obtendo assim: -$f(75) = 3 + 0{,}12 \times 75 = 12€$ -$g(75) = 7 + 0{,}05 \times 75 = 10{,}75€$ Comparando as duas expressões algébricas, verem que o tarifário mais vantajoso será o tarifário G. Ou calculando de forma análoga à utilizada na questão 2.1. **Dificuldades 2.7:** Não são esperadas dificuldades, pois os alunos além de puderem recorrer à expressão algébrica, também poderão utilizar os dados do enunciado para responderem. A única dúvida esperada será a conversão de minutos para horas.	**Apoio a prestar 2.7):** - Para podermos comparar o que temos de fazer primeiro? - Uma hora são quantos minutos?

8.º - Discussão em grande grupo da questão 2 | 15 minutos

A professora, após dar por concluído o segundo momento de trabalho autónomo, deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Recordar a terminologia: variável dependente, variável independente, coeficiente de x e termo independente.
- Recordar as funções constantes, lineares e afins e respetivas expressões algébricas;
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q2.1:** Um aluno apresenta oralmente a sua resposta, a pedido da professora, justificando-a. A professora deve realçar a importância de um custo fixo e a sua diferença para um custo variável, questionando: *Qual é a diferença entre os dois tarifários? Que influência tem o custo fixo?*
- **Discussão Q2.2:** Solicitar a um aluno que responda oralmente, justificando a sua resposta. A professora deve questionar se alguém obteve outra resposta para tentar envolver toda a turma e clarificar a diferença entre a variável dependente e independente.
- **Discussão Q2.3:** A professora solicita a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, pedindo para explicar à turma como procedeu. A professora deve certificar-se que toda a turma percebe a nomenclatura utilizada e o significado de $g(30)$.
- **Discussão Q2.4:** A professora deverá pedir a um aluno que diga a sua resposta oralmente, justificando a sua escolha. Neste momento é muito importante que a professora esclareça a diferença entre a função constante, linear e afim, podendo questionar a turma: *Que características têm estas funções? Qual expressão algébrica da função constante? E da função linear? E da função afim?*
- **Discussão Q2.5:** para a apresentação dos resultados desta questão, a professora solicita a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, optando por selecionar um par cuja expressão analítica não esteja correta, para que haja uma proveitosa discussão em grande grupo. Aqui, a professora deverá reforçar, novamente, que é uma função afim, pois tem coeficiente de x e termo independente.
- **Discussão Q2.6:** a professora deverá pedir a dois alunos que digam as suas respostas oralmente, um para cada uma das funções, justificando a sua escolha. A professora deverá questionar a turma se houve respostas distintas, clarificando estas duas noções.

Discussão Q2.7: na apresentação de resultados desta alínea a professora deverá solicitar a um dos alunos que apresente a resolução do par no quadro, garantindo que apresentam a resposta correta e que faz uma explicação à turma sobre a estratégia de resolução. Este aluno, preferencialmente, terá optado por resolver a alínea utilizando a expressão algébrica. A professora poderá pedir a outro aluno que não tenha utilizado a mesma estratégia que responda oralmente, para desta forma ser possível comparar as duas resoluções e enriquecer a discussão.

9.º Síntese dos conteúdos	**| 5 minutos**

Nos minutos dedicados à síntese, a professora questionará os alunos sobre o tipo de funções que trabalharam na aula, relembrando a que a função afim se obtém a partir da linear, por soma de uma constante. Este será o momento oportuno que os alunos possam esclarecer as suas dúvidas e, se necessário, a professora poderá retomar os exemplos anteriores com recurso ao GeoGebra para clarificar ideias. Para finalizar a professora deve questionar: "*Que tipos de função conhecem?",* com o objetivo de que os alunos se recordem das designações de função constante, linear e afim. A professora deverá escrever uma expressão geral destas funções no quadro para que os alunos registem no caderno.

10.º Encerramento da aula	**| 3 minutos**

A professora deverá devolver aos alunos as fichas de trabalho recolhidas na aula anterior.

Será feita uma proposta de trabalho de casa, que os alunos devem registar no caderno: a realização da Tarefa de Consolidação n.º 1, que deverá ser resolvida na ficha e entregue à professora na aula seguinte.

Formas e momentos de avaliação:

Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback*, serão recolhidas as produções escritas dos alunos, bem como serão anotados na grelha da turma as participações e trabalhos de casa.

Anexo 3.4 – Planificação da 4.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 4.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 120 e 121 — 11 de abril de 2016

Sumário: Continuação da aula anterior: as funções linear, afim e constante.

Duração da aula: 90 minutos

Objetivos:

- Representar algebricamente e graficamente uma função afim
- Relacionar funções lineares com funções afins
- Reconhecer o gráfico de uma função afim como a translação do gráfico de uma função linear segundo um vetor
- Reconhecer, dada uma função linear, a imagem de um como coeficiente de x
- Identificar que as retas não verticais que passam na origem representam gráficos de funções lineares
- Interpretar a função linear e a função afim atendendo a diferentes contextos: resolução de problemas com recurso ao *software* GeoGebra
- Recordar as noções de declive e ordenada na origem

Conhecimentos prévios dos alunos:

- A noção de função e conceitos como: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto
- Reconhecer uma função de proporcionalidade direta e uma função linear
- Determinar a constante de proporcionalidade

Recursos para o professor:	**Recursos para o aluno:**
▪ Ficha de trabalho n.º 3 ▪ Tarefa "Funções no GeoGebra" ▪ Computador com o *software* GeoGebra e projetor ▪ Manual escolar ▪ Quadro e marcador	▪ Ficha de trabalho n.º 3 ▪ Computador com o *software* GeoGebra ▪ Tarefa "Funções no GeoGebra" ▪ Material de desenho e escrita ▪ Guião do GeoGebra ▪ Manual escolar

Metodologia de trabalho:

- Introdução da tarefa, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos a pares na sala de informática da escola.

Momentos da aula:

	Momentos da aula	**Tempo previsto** (em 90 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	5 min
2.º	Continuação da resolução da questão 1 da ficha de trabalho n.º 3	10 min
3.º	Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 1: continuação	10 min
4.º	Sistematização com o GeoGebra	20 min

5.º	Apresentação da Tarefa "Funções no GeoGebra"	7 min
6.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da Tarefa	20 min
7.º	Discussão em grande grupo e resolução da Tarefa	10 min
8.º	Síntese dos conteúdos	5 min
9.º	Encerramento da aula	3 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças | 5 minutos

Como o funcionamento dos computadores e do *software* GeoGebra será crucial para o desenvolvimento da aula, antes do início da mesma, a professora deverá acautelar o funcionamento destes dispositivos e do projetor.

Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos, ditará o sumário e será apoiada pela colega de estágio na recolha do trabalho de casa e na distribuição da Ficha de Trabalho n.º3 (recolhida na aula anterior).

Ao distribuir a Ficha de Trabalho por todos os alunos, estes serão informados pela professora do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho. A professora deve informar os alunos que irão concluir a resolução da Ficha de Trabalho n.º 3 apenas durante 10 minutos, que será seguida da discussão em grande grupo, e que, na segunda metade da aula, cada par trabalhará numa tarefa, com recurso ao computador e ao *software* GeoGebra.

2.º - Continuação da resolução da questão 1 da ficha de trabalho n.º 3 | 10 minutos

Uma vez que a ficha de trabalho já foi resolvida e discutida até à alínea 1.4., os alunos deverão retomar a questão 1 na alínea 1.5..

A professora circulará pela sala com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades (privilegiando o questionamento), e de monitorizar o seu trabalho, acautelando possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, evitando validar as suas respostas, e caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. A professora deve ainda atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	**Estratégias 1.5.a):** - Referir que ambas as representações gráficas passam na origem do referencial e que são semirretas (ou que são pontos alinhados segundo uma semirreta); -Indicar que são funções lineares de constante igual ao preço por quilograma de laranjas/bananas; -Referir que o custo varia em função do peso, em ambas as funções f e g. **Dificuldades 1.5.a):** - Em expressar as semelhanças entre as funções. **Estratégias 1.5.b):** -Observar que a representação gráfica de g tem maior inclinação em relação à parte positiva do eixo do xx que f (diferem na inclinação); - As suas expressões diferem na constante de proporcionalidade (ou na constante da função). **Dificuldades 1.5.b):**	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 1.5.a) e b):** -Quais são as funções f e g? -Sugerir que observe o gráfico. -As funções f e g são de algum modo parecidas/distintas?

	- Em expressar as semelhanças entre as funções.	
	Estratégias 1.6: -Responder que é falsa por f e g serem lineares (justificando pela expressão algébrica ou por observar que os gráficos passam na origem) -Indicar que não são constantes porque o custo aumenta com o peso; - Justificar que as retas não são horizontais. **Dificuldades 1.6:** -Em recordar o que é uma função constante; -Ao responder que a afirmação é verdadeira; -Não justificar.	**Apoio a prestar 1.6:** -Como é que estás a pensar? -Como é uma função constante? -O peso das laranjas/bananas é sempre o mesmo?
	Estratégias 1.7.a) e b): - Responder à questão por observação do gráfico, identificando 2,40€ como o custo de $3Kg$ de laranjas e somar 2€ , obtendo $4{,}40$€. Finalmente, indicar na alínea b) que se pagará 2,40€, sem entrega ao domicílio, e que a diferença entre os valores pagos é de 2€. **Dificuldades 1.7.a):** -Ao apresentar o resultado sem somar os 2€ de custo fixo. **Dificuldades 1.7.b):** -Não são esperadas grandes dificuldades, a não ser que respondam incorretamente à alínea anterior.	**Apoio a prestar 1.7.a) e b):** -Nesta situação o cliente só paga o custo das laranjas? -Qual é o custo da entrega ao domicílio?
	Estratégias 1.7.c): - Designar o peso por p, e a função que representa o custo por $j(x)$, recorrendo ao preço por quilograma (ou à constante de proporcionalidade), adicionar os 2€ de custo fixo e escrever $j(x) = 0{,}8x$+2. **Dificuldades 1.7.c):** -A dificuldade poderá residir na generalização da relação entre o custo e a quantidade de fruta; - Alguns alunos poderão ainda indicar uma expressão incorreta, nomeando a variável por x, por exemplo.	**Apoio a prestar 1.7.c):** - Como estás a pensar? - Como á relacionado o custo das laranjas com a quantidade (em quilogramas) comprada? Só importa o peso da fruta? - Quanto custam 3Kg sem entrega ao domicílio? E com entrega? - Sugerir que nomeiem as variáveis de acordo com o observado no enunciada.
	Estratégias 1.8: Identificar o eixo das abcissas com o peso e o das ordenadas com o custo, identificar dois pontos que pertençam a cada uma das funções f e j, marcá-los e uni-los dois a dois. Os alunos poderão revelar cuidado ao marcar as semirretas, com a consciência que as funções estão definidas apenas para valores positivos ou nulos. **Dificuldades 1.8:** Esta questão poderá levantar algumas dificuldades, alguns alunos podem revelar dificuldades: - Ao representar a reta também para valores negativos; - Em identificar pontos para traçar as retas; -Ao nomear os eixos e/ou as representações; - Em definir uma escala para os eixos.	**Apoio a prestar 1.8:** -Qual é a variável dependente? E a independente? -Qual das representações corresponde ao custo com entrega ao domicílio? -Neste contexto, é possível termos custos negativos ou pesos negativos? - Sugerir, por exemplo, que duas quadrículas correspondam a uma unidade, em ambos os eixos.
	Estratégias 1.8.1: Os alunos poderão indicar que as retas são paralelas ou que têm a mesma inclinação. **Dificuldades 1.8.1:** -Caso tracem mal as representações poderão tirar outras conclusões.	**Apoio a prestar 1.8.1:** -Qual das representações corresponde ao custo, com entrega ao domicílio? Qual é o custo dessa entrega? - Um cliente pagará o mesmo nas duas situações se comprar a mesma quantidade de laranjas? Porquê?

	Estratégias 1.9:	Apoio a prestar 1.9:
	Estratégias 1.9: Indicar que as funções f e j têm o mesmo coeficiente. **Dificuldades 1.9:** -Ao indicar que as funções f e j têm a mesma constante de proporcionalidade.	**Apoio a prestar 1.9:** -As funções f e j são do mesmo tipo? Como se chama a uma função do tipo da f? E da j? - Que características semelhantes têm as expressões? Que características distintas apresentam?

3.º - Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 1: continuação | 10 minutos

Após dar por concluído o primeiro momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Interpretar funções lineares e afins
- Representar algebricamente e graficamente uma função afim
- Relacionar funções lineares com funções afins
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

Discussão Q1.5.a) e b): Esta questão pode originar uma discussão rica em intervenções por parte dos alunos, já que poderá suscitar diversos comentários sobre as características gráficas ou algébricas das funções f e g. A professora deverá solicitar a dois ou três alunos que participem oralmente, de forma ordeira, e deve registar no quadro as intervenções dos alunos. No final, deverá ficar claro para os alunos que são ambas funções do tipo $h(x) = kx$ (em que k é a constante de proporcionalidade) com o mesmo domínio (números reais positivos), que o facto de o gráfico ter maior inclinação (relativamente à parte positiva dos eixo das abcissas) está relacionada com o facto da constante de proporcionalidade da função g ser superior à da f e que a imagem de 0 é 0, para ambas as funções, isto é, ambas passam na origem do referencial. Reforçar que o coeficiente da função linear é igual ao ponto do gráfico com abcissa igual a 1, isto é, é a imagem de f(1) e portanto f(1) é a constante de proporcionalidade.

- **Discussão Q1.6:** Outro aluno é chamado pela professora a participar oralmente, que depois questionará se existem outras justificações. Aqui, a professora deverá em interação com os alunos destacar que para diferentes pesos o custo não é constante, recordando, nesse momento, as expressões algébricas indicadas anteriormente e que a imagem de 0 é 0, para ambas as funções. Para concluir, a professora deverá questionar se os alunos se recordam da designação que deram a funções daquele tipo no final da aula anterior.

- **Discussão Q1.7.a) e b):** A resposta a estas alíneas deverá ser dada oralmente por um aluno, que por sua vez deverá explicar como o par pensou, enquanto a professora deverá fazer o registo da resposta do aluno no quadro. Nesta discussão a professora deverá enfatizar o custo fixo, de dois euros, da entrega ao domicílio, e a sua influência no custo final.

- **Discussão Q1.7.c):** Ao pedir a um aluno que apresente a resolução no quadro, a professora deve assegurar que o aluno explica o raciocínio do par à turma. Neste segmento, a professora deve chamar à atenção para a nomeação das variáveis em causa, bem como para o facto de adicionarmos um valor fixo (constante) ao custo das laranjas. A professora deverá ter o cuidado de não explorar esta questão exaustivamente para não influenciar a resposta às alíneas seguintes, ainda assim, deverá questionar os alunos se se recordam que nome se dá a uma função daquele tipo, função afim.

- **Discussão Q1.8**: A resolução desta questão ficará a cargo da professora, que irá solicitar a intervenção dos alunos. Aqui, em interação com os alunos, a professora deverá destacar a nomeação dos eixos (o eixo das abcissas representa o peso e o das ordenadas o custo), dando ênfase à escolha de pontos para traçar a semirreta. A professora deve questionar a turma: *"Como poderemos representar graficamente esta função?", "O que precisamos conhecer para traçar uma reta?".* Posto isto, a explicação da professora será no sentido de levar os alunos a perceber que precisam calcular a imagem de dois objetos distintos através da expressão algébrica (para cada uma das funções) obtendo dois pares ordenados. Ao marcar os referidos pares no referencial, que estará projetado no quadro, devem uni-los, atendendo ao domínio de cada função, e traçar as semirretas correspondentes aos gráficos das funções f e j. Para finalizar, a professora deverá questionar se os alunos têm dúvidas em como representar graficamente uma função, dada a sua expressão algébrica.

- **Discussão Q1.8.1:** No seguimento da alínea anterior, um outro aluno deve expor a resposta do par oralmente, e a discussão deve ser mediada pela professora com o objetivo de observar que as semirretas são paralelas, ou seja, que as representações gráficas de f e j têm a mesma inclinação apesar de uma passar na origem do referencial e outra não. Este será o momento oportuno para que a professora questione: *Existe alguma transformação que nos permita partir da representação da função f para a j?* A professora deverá projetar um ficheiro GeoGebra com estas representações e mostrar, em interação com os alunos, que estas duas representações (com o auxilio de um seletor) são paralelas e que j resulta de f pela translação segundo o vetor $(0,2)$. Aqui a professora deve notar que a extremidade do vetor coincide com o ponto onde j interseta o eixo referente ao custo.
- **Discussão Q1.9:** Finalmente, a professora deverá questionar outro par de alunos relativamente às expressões algébricas de f e j. O par deverá explicar oralmente para a restante turma a sua justificação que poderá ser complementada com outras intervenções de alunos, a pedido da professora. A professora deverá chamar a atenção dos alunos no que difere nas duas expressões: a soma de uma constante, 2. Aqui, poderá ser oportuno evidenciar que a representação gráfica se "deslocou" duas unidades, isto é, o custo das laranjas com entrega ao domicílio aumenta dois euros no custo final, independentemente da quantidade que se comprar (para tal a professora deverá comparar dois ou três pontos nos dois gráficos, com a mesma abcissa. Será natural que os alunos façam diversas questões, às quais a professora deverá responder, tentando não fugir do objetivo desta questão.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

4.º - Sistematização com o GeoGebra | 20 minutos

Ao articular este segmento com as funções f e j discutidas anteriormente, a professora deverá questionar: *Que nome dão a uma função que seja do tipo da f? E se for como a j?.* Face às interações dos alunos, a professora deverá recordar as funções lineares e afins. Antes de avançar será importante esclarecer as dúvidas que surjam.

Em seguida, a professora projetará no quadro um ficheiro GeoGebra com o intuito de que os alunos observem o gráfico de uma função afim, a partir de uma função linear, por translação de um vetor. A professora deverá tirar partido das potencialidades deste recurso para que os alunos observem o paralelismo entre estas duas retas. Assim, com exemplos concretos, a professora deve enfatizar que o gráfico de uma função linear passa no ponto de coordenadas $(0,0)$, e o gráfico de uma função afim (paralelo ao da função linear) passa no ponto $(0, b)$ [para valores positivos ou negativos de b], designando-se b por ordenada na origem . Como exemplo, a professora poderá questionar os alunos, *Dada a função linear $t(x) = 12x$, como posso obter uma função afim cujo gráfico seja paralelo a este e passe no ponto (0, 7)*? E, *dada uma função afim $l(x) = 3x - 36$, como posso obter uma função linear cujo gráfico seja paralelo?*

Ainda neste segmento, a professora deverá referir que a função afim se obtém da linear, somando-lhe uma constante. Assim, deverá questionar: *Existirá a função constante? Como se representa?* A professora deve apresentar exemplos de funções constantes e ditar aos alunos a sua expressão geral, para que estes registem no caderno.

Depois de a professora reforçar estes aspetos deve questionar se existem dúvidas e pedir aos alunos que, como trabalho de casa, copiem para o caderno noções das páginas 158 e 159, bem como o texto do retângulo verde da página 166 do manual escolar.

Ainda neste momento, em interação com os alunos, a professora deverá esclarecer que o gráfico de uma função afim é uma reta do tipo $y = ax + b$, em que a se designa por declive e b por ordenada na origem. A professora pedirá que os alunos, também como trabalho de casa, registem no caderno o 2.º retângulo verde da página 168 do seu manual escolar. Para culminar a professora deve enfatizar que uma equação do tipo $y = ax + b$ é designada por equação reduzida da reta. Assim, deverá questionar: $y = -9x + 66$ *pode ser a equação reduzida de uma reta? E* $y = 3x + 2 - 4 + 5$*?*, para enfatizar, que no último caso, teríamos de somar os termos semelhantes ou, no caso da equação $y - 4 = 8x - 2 + 3x$, teríamos de resolvê-la em ordem a y e somar todos os termos semelhantes.

5.º - Apresentação da Tarefa: "Funções no GeoGebra" | 7 minutos

Ao distribuir a Ficha de Trabalho por todos os alunos, estes serão informados pela professora do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho. A professora deve informar que cada par de alunos irá trabalhar num computador, utilizando o *Software* de Geometria Dinâmica "GeoGebra", e que dispõem de um guião que contem os principais comandos para a utilização deste programa.

A professora solicitará a um aluno que leia para a turma a primeira questão da tarefa, que estará projetada no quadro, questionando se existem dúvidas no que leram, solicitando, nesse caso, a outro aluno que explique a situação proposta para o colega. Após este segmento, a professora indicará que os alunos dispõem de 20 minutos para a resolução da ficha e que a esse momento se seguirá uma discussão em grande grupo.

Nesta fase inicial, e uma vez que é o primeiro contacto dos alunos com este recurso, a professora deverá exemplificar no seu computador (que estará projetado) que pasta e que documento os alunos terão de abrir para iniciar a tarefa.

6.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da tarefa | 20 minutos

A professora circulará pela sala monitorizando o trabalho dos alunos, tentando promover a interação entre os pares de alunos e contará com o apoio da colega de estágio para as dificuldades que possam surgir ao nível do manuseamento do programa, por parte dos alunos.

Caso a professora verifique que os alunos estão de um modo geral com dificuldades na utilização do GeoGebra, deverá utilizar a projeção do seu computador e fazer uma explicação alargada a toda a turma, a título de exemplo.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	**Estratégias 1.1:** Introduzir no campo "Entrada" as funções $a(x) = 8$, $f(x) = 3x$ e $h(x) = -7x + 6$. **Dificuldades 1.1:** Não são esperadas grandes dificuldades, pois os alunos têm o guião e apenas terão de introduzir as funções. Ainda assim,	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?*

	por ser o primeiro contacto com o recurso, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Em perceber em que campo deverão introduzir as expressões algébricas. - Em escrever corretamente as expressões	**Apoio a prestar 1.1:** - Onde devemos introduzir as expressões algébricas das funções? - O que diz o Guião? - Sugerir que veja o guião.
	Estratégias 1.2: Introduzir o ponto A=(6,-1) e o ponto B=(3,5) no campo "Entrada" e selecionar o botão ***Reta (Dois Pontos).*** De seguida clicar com o cursor esquerdo do rato sobre um dos pontos e depois clicar em cima do outro ponto. **Dificuldades 1.2:** Na resolução desta alínea não são esperadas muitas dificuldades já que no enunciado sugere recorrer ao Guião.	**Apoio a prestar 1.2:** - O que deves fazer primeiro? - Como se introduzem pontos? - O que diz o Guião?
	Estratégias 1.2.1: -Recorrendo ao Guião, os alunos irão observar a folha algébrica do GeoGebra e escrever na folha de resposta a equação $2x + y = 11$. - Recorrendo ao Guião, os alunos irão clicar no botão esquerdo do rato sobre expressão algébrica da equação da reta e selecionar a opção ***Equação*** $\boldsymbol{y = mx + b}$, escrevendo na folha de resposta $y = -2x + b$. **Dificuldades 1.2.1:** - Ao não identificar a equação da reta na Folha Algébrica do GeoGebra.	**Apoio a prestar 1.2.1:** - O que é pedido no enunciado? -Sugerir aos alunos que consultem o guião do GeoGebra na página 5.
	Estratégias 1.3.1: -Clicarem sobre a função f e arrastarem o seu gráfico, obtendo desta forma uma função paralela. - Introduzirem no campo "Entrada" uma função constante. -Observarem a Folha Algébrica e copiarem para o enunciado a nova expressão algébrica **Dificuldades 1.3.1:** São esperadas algumas dificuldades. Tais como: - Não compreenderem o que é o gráfico de uma função ser paralelo ao gráfico de outra função. - Não saberem como traçar a reta paralela com recurso ao GeoGebra.	**Apoio a prestar 1.3.1:** - O que é uma função paralela? -Com recurso ao GeoGebra como conseguirás representar uma função paralela? -Consegues dar um exemplo de uma função constante? É paralela a a?
	Estratégias 1.3.2: -Análogas à Questão 1.3.1 - Introduzirem no campo "Entrada" uma função linear de coeficiente -7. **Dificuldades 1.3.2:** Análogas à Questão 1.3.1	**Apoio a prestar 1.3.2:** - O que é uma função linear? - Poderá intersetar o eixo das ordenadas no mesmo ponto que $h(x)$? Onde interseta o eixo yy? - A função h é uma função de que tipo? -Como é que obtemos a representação gráfica de uma função afim a partir de uma linear? Então como iremos obter uma função linear a partir da afim?
	Estratégias 1.3.3: -Identificar que uma função linear é do tipo $t(x) = ax$, em que a é uma constante e, selecionando um valor para a, escrever a função no campo "Entrada". **Dificuldades 1.3.3:** Análogas à Questão 1.3.1 - Não revelar espírito crítico caso a reta não passe na origem do referencial.	**Apoio a prestar 1.3.3:** -Qua características tem uma função linear? - Com recurso ao GeoGebra como conseguirás representar uma função linear? -Consegues dar um exemplo de uma função linear diferente das que aí tens?

7.º - Discussão em grande grupo e resolução da Tarefa	| 10 minutos

A professora, após dar por concluído o segundo momento de trabalho autónomo, deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Observar a representação gráfica de funções constantes, lineares e afins.
- Reconhecer como traçar uma reta a partir de dois pontos
- Consolidar a noção de representação gráfica de uma função afim como translação de uma função linear
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio, a escrita e o gosto pela Matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Como foi trabalhar com o GeoGebra? Todos conseguiram resolver esta questão? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q1.1:** A professora deve questionar se existiram dificuldades ao fazer estas representações com recurso ao GeoGebra, solicitando a um par de alunos que vá ao computador da professora explicar aos colegas como procedeu (sendo este procedimento projetado no quadro para que toda a turma possa observar). A professora deve questionar os alunos "*Que tipo de função é a $a(x)$, a $f(x)$ e a $h(x)$?"* e pedir que registem no caderno as expressões algébricas das funções a, f e h, anotando que são, respetivamente, função constante, linear e afim.
- **Discussão Q1.2:** Caso se tenham verificado dúvidas generalizadas na realização desta alínea, a professora deve solicitar a um aluno que se dirija ao seu computador e que explique aos colegas como resolver (sendo este procedimento projetado no quadro). Caso contrário, em interação com os alunos, a professora deverá frisar que o gráfico de uma função afim é uma reta, questionando *"Quantos pontos são necessários para traçar uma reta?",* com o objetivo de que os alunos percebam que precisamos conhecer dois pontos. Na discussão desta questão será interessante que a professora questione dois alunos (representativos do par) e registe no quadro a equação da reta que cada um dos pares obteve, garantido que um dos pares indica a forma reduzida e o outro não. Aqui, a professora deverá questionar se todos obtiveram uma daquelas expressões, questionando a turma se as equações $2x + y = 11$ e $y = -2x + 11$ são distintas, com o objetivo de destacar a forma reduzida de uma equação.
- **Discussão Q1.3.1:** A professora deverá pedir a três alunos que digam a expressão da função, cujo gráfico é paralelo ao gráfico da função constante que traçaram, oralmente, e ficará encarregue de introduzi-las no ficheiro GeoGebra do seu computador como o objetivo de que todos os alunos vejam que as retas são todas paralelas.
- **Discussão Q1.3.2:** A professora solicitará a um aluno que vá ao seu computador explicar a sua resposta. Aqui, em interação com os alunos, a professora deverá destacar que se o gráfico de uma função afim se obtém a partir do de uma linear, por translação segundo um vetor, também o gráfico de uma função linear se obtém por translação do gráfico de uma função afim. Ficará também a cargo da professora escrever a expressão algébrica da função h e da nova função, destacando que a ordenada na origem é 6, pelo que o gráfico da função afim se deslocou seis unidades para baixo, obtendo-se a função linear.
- **Discussão Q1.3.2:** a professora deverá pedir a três alunos que digam as expressões das funções que representaram, garantindo que são distintas, e registá-las no quadro. Em seguida, deverá analisar as expressões algébricas com os alunos, enfatizando que são do tipo ax (com a constante) e inserir no ficheiro GeoGebra do seu computador, projetando-o para fazer notar que todas passam na origem do referencial e que a imagem de 1 por cada uma das funções é a.

9.º Síntese dos conteúdos	| 5 minutos

Nos minutos dedicados à síntese, a professora questionará os alunos sobre o tipo de funções que trabalharam na aula, relembrando a que a função afim se obtém a partir da linear, por soma de uma constante. Este será o momento oportuno que os alunos possam esclarecer as suas dúvidas e, se necessário, a professora poderá retomar os exemplos anteriores com recurso ao GeoGebra para clarificar ideias. Para finalizar a professora deve questionar: "*Que tipos de função conhecem?",* com o objetivo de que os alunos se recordem das designações de função constante, linear e afim. A professora deverá escrever uma expressão geral destas funções no quadro para que os alunos registem no caderno.

10.º Encerramento da aula	**| 3 minutos**

A professora deverá recolher a Ficha de Trabalho n.º 3 e a Tarefa "Funções no GeoGebra" e informar que estas serão devolvidas na aula seguinte.

Será feita uma proposta de trabalho de casa, que os alunos devem registar no caderno: a realização da questão 1 da página 79 do Caderno de Atividades e, como anteriormente referido, será pedido aos alunos para que registem no caderno diário as noções das páginas 158, 159 e 166 do manual escolar.

Formas e momentos de avaliação:

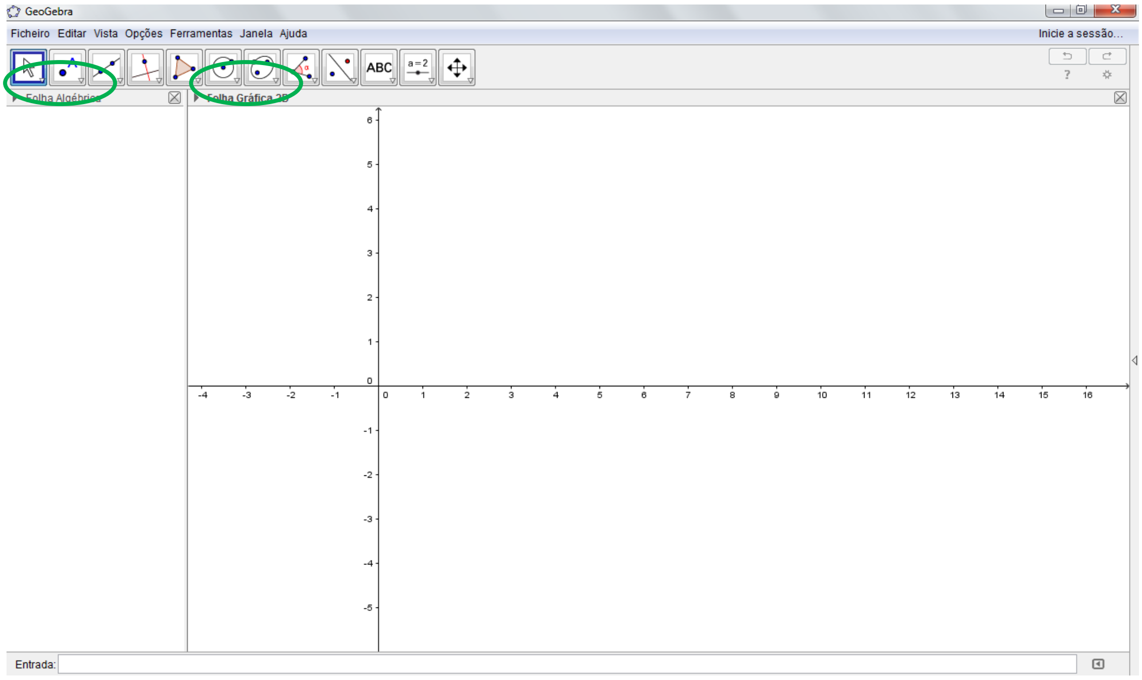
Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback*, serão recolhidas as produções escritas dos alunos, bem como serão anotados na grelha da turma as participações e trabalhos de casa.

Matemática 8.º Ano	Aluno:______________________________ N.º: _____ Turma: ____
	Guião GeoGebra

Guião GeoGebra

O GeoGebra é um programa que nos permite, por exemplo, marcar pontos, traçar retas, desenhar triângulos, desenhar circunferências e muito mais.

Ao abrires o GeoGebra é apresentada uma janela idêntica à da figura.

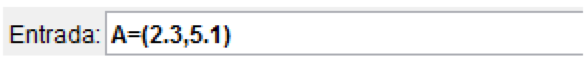


Se reparares a janela tem uma *Folha Algébrica* e uma *Folha Gráfica 2D*. Por exemplo, quando se introduz uma função, na *Folha Algébrica* aparece a sua expressão algébrica e, na *Folha Gráfica 2D,* a sua representação gráfica.

Inserir pontos, retas ou funções

A caixa de entrada permite inserir objetos na folha gráfica 2D, tais como funções ou pontos.

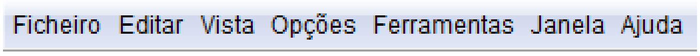
- Se quiseres **inserir um ponto,** por exemplo o ponto A de coordenadas (2,3;5,1), deves escrever na caixa ***Entrada*** A=(2.3,5.1) e clicar na tecla ***Enter*.** (Atenção: a vírgula de um número no GeoGebra representa-se por um ponto, tal como na calculadora).



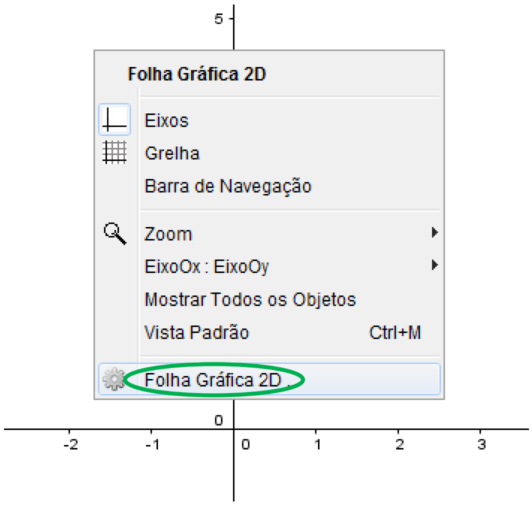
- Se quiseres **inserir uma função**, por exemplo, $f(x) = 4x$, escreve a expressão na caixa ***Entrada*** e clica ***Enter*.**

❖ Se quiseres **inserir uma reta**, por exemplo, $y = 8x + 5$, escreve a expressão na caixa ***Entrada*** e clica ***Enter.***

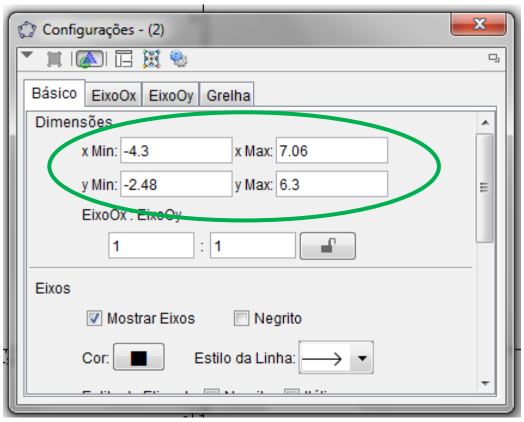
A barra seguinte tem botões que permitem efetuar várias operações como gravar ou aceder a algum ficheiro já existente, abrir ou fechar a *Folha Algébrica*, entre muitas outras opções.



Para a representação gráfica de funções pode ser útil **alterar as dimensões da *Folha Gráfica 2D,*** como a escala dos eixos. Para tal, com o cursor na *Folha Gráfica 2D,* clica com o botão direito do rato e seleciona a opção ***Folha Gráfica 2D***.

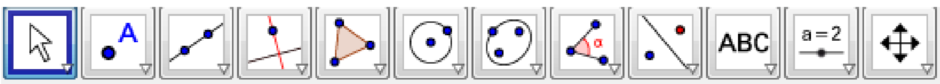


Depois abrirá uma janela como a seguinte, onde introduzirás os valores que pretendes para o x e para y.



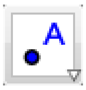
Em alternativa, podes ampliar ou reduzir as dimensões através do botão ***Arrastar a Folha Gráfica*** que será explicado de seguida.

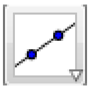
Na janela principal do GeoGebra são apresentados vários **botões** em linha, sendo que em cada um desses botões ao clicar-se na seta do canto inferior direito são apresentados funcionalidades relacionados com a ação do botão original.

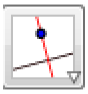


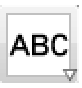
Para a tarefa que irás realizar é útil conheceres alguns exemplos dos comandos dos botões e as suas funcionalidades:

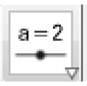
 **Botão *Mover***: Permite selecionar os objetos e move-los;

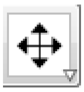
 **Botão *Novo Ponto***: Clicando sobre a ***Folha Gráfica 2D***, cria um ponto indicando automaticamente as suas coordenadas, tanto numa área livre como num gráfico, determina a interseção de dois objetos (por exemplo, a interseção de duas retas), calcula o ponto médio entre dois objetos;

 **Botão *Reta (Dois Pontos)***: A partir de dois pontos, cria uma reta, segmento de reta, semireta, linha poligonal ou vetores;

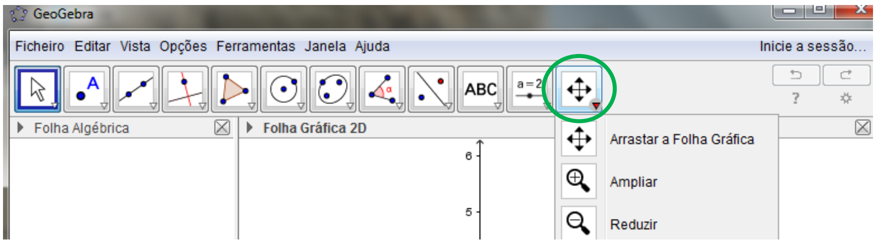
 **Botão *Reta Perpendicular***: A partir de uma reta e de um ponto, cria uma reta perpendicular, uma reta paralela, a mediatriz, a bissetriz e retas de regressão linear;

 **Botão *Inserir texto***: Pode-se inserir textos, mas também imagens.

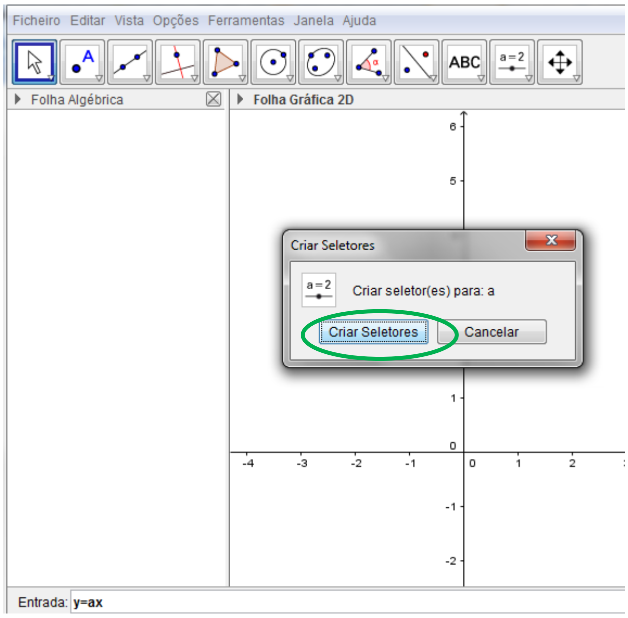
 **Botão *Seletor***: Permite escrever uma expressão no GeoGebra, como por exemplo, $f(x) = ax$ em que *a* pode ser um qualquer número real no intervalo que quisermos considerar.

 **Botão *Arrastar a Folha Gráfica***: Ao clicares neste botão consegues arrastar a folha gráfica, ampliar e reduzir a mesma. Pode ser útil para alterar as dimensões do referencial.

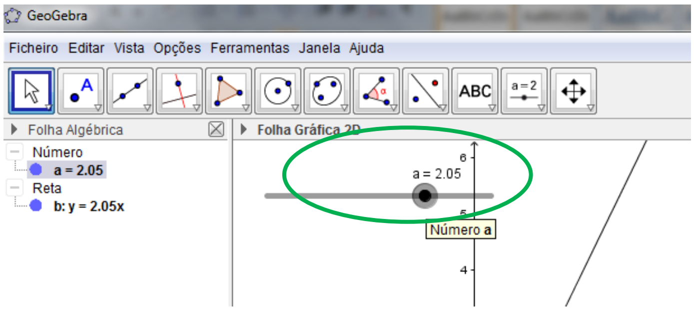
Para **ampliarmos, reduzirmos ou arrastarmos** a *Folha Gráfica 2D*, basta clicarmos no botão ***Arrastar a Folha Gráfica*** e clicar na opção que queremos.



Para **inserirmos uma equação do tipo** $y = ax$ (em que a é um valor qualquer diferente de 0), precisamos escrever esta equação na caixa ***Entrada*** e clicar ***Enter***. De pois temos de selecionar a opção ***Criar Seletores***, como indica a imagem seguinte.



Neste caso, é criado o seletor *a*. Para **movermos o seletor** *a* é necessário premirmos o botão esquerdo do rato e arrastar para o valor que pretendemos. Como exemplifica a figura abaixo.

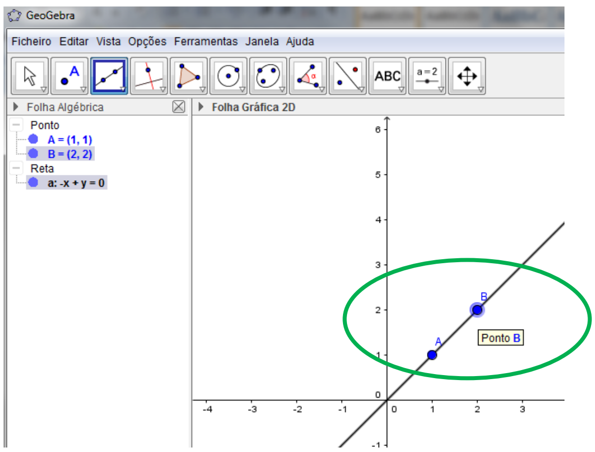


Para **inserirmos uma reta a partir de dois pontos** e obter a **equação da reta** devemos:

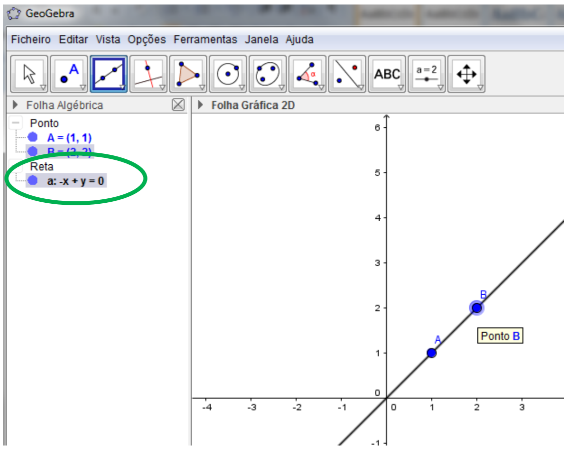
- inserir os pontos, um de cada vez, na caixa ***Entrada***

- selecionar ao botão ***Reta (Dois Pontos)***.

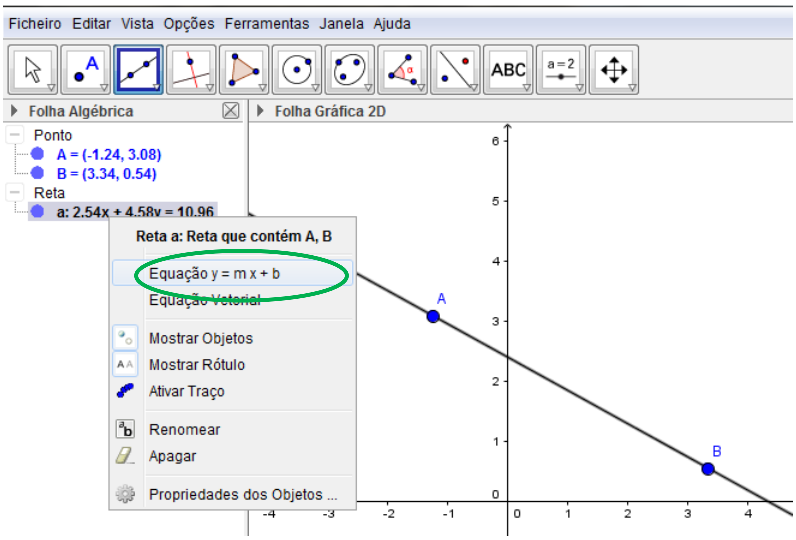
- de seguida deves clicar com o cursor esquerdo do rato sobre um dos ponto e depois clicar em cima do outro ponto (como na figura seguinte):



- repara que ao traçar a reta obtiveste a sua equação na folha algébrica.

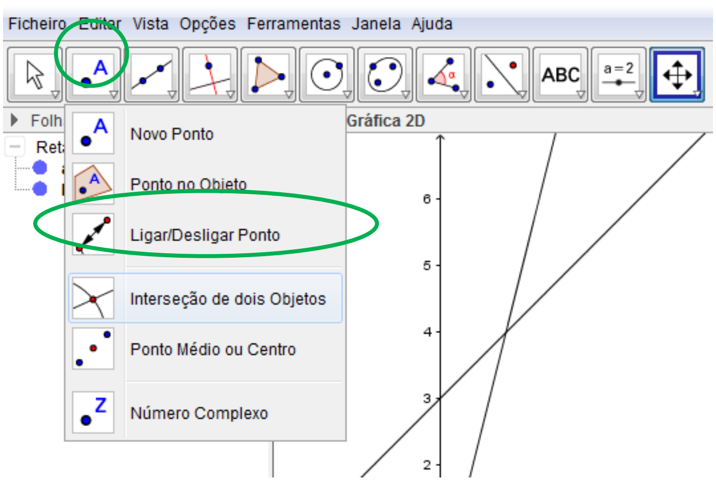


Obtendo a expressão algébrica de uma equação no GeoGebra, para a escrevermos na **forma** $\boldsymbol{y = mx + b}$ é necessário clicar com o botão direito do rato na expressão da equação e selecionar a opção ***Equação*** $\boldsymbol{y = mx + b}$.

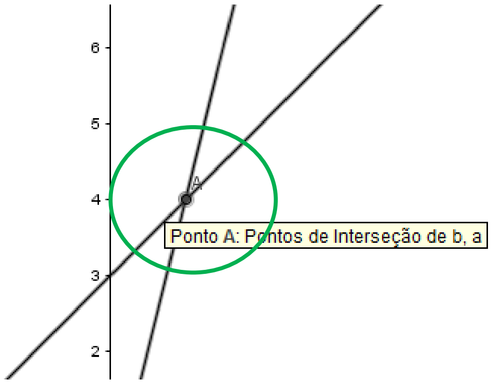


Para determinar a **interseção de duas retas** devemos:

- clicar sobre o botão *Novo Ponto* e em seguida escolher a opção “Interseção de dois objetos”

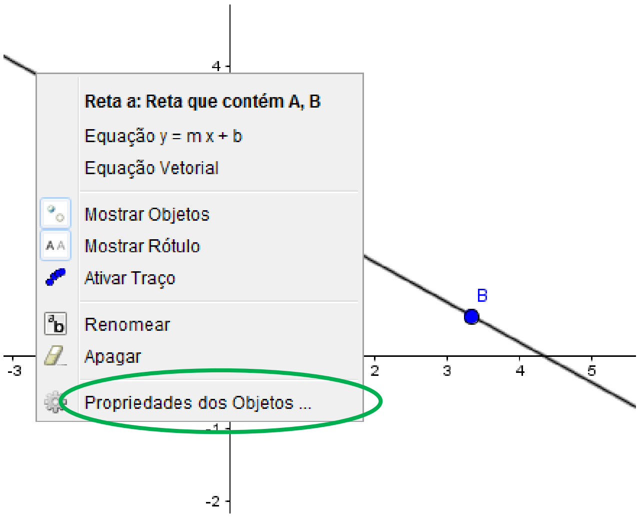


- clicar sobre as duas retas que pretendemos determinar a interseção. Repara que depois irá aparecer o ponto onde as duas retas se intersetam



Alterar cor, nome e propriedades dos pontos, retas

Na *Folha Gráfica 2D* ou na Folha Algébrica, ao clicar com o botão direito do rato sobre o objeto (ponto, reta, ...) é possível alterar o seu nome, a sua cor, entre outros. Para isso seleciona ***Propriedades dos Objetos***.



Anexo 3.5 – Planificação da 5.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 5.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 122 13 de abril de 2016

Sumário: Continuação da aula anterior.
Resolução de exercícios do manual escolar: Gráfico de uma função afim.

Duração da aula: 45 minutos

Objetivos:
- Consolidar as noções de declive e ordenada na origem
- Consolidar a noção de gráfico de uma função afim como translação de uma função linear, e reciprocamente
- Representar algebricamente e graficamente uma função afim
- Representar algebricamente uma função afim, dada a representação gráfica de uma função linear com o mesmo coeficiente.
- Determinar a interseção do gráfico de uma função afim com os eixos coordenados

Conhecimentos prévios dos alunos:
- A noção de função e conceitos como: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto, declive e ordenada na origem
- Reconhecer as funções constante, linear e afim
- Calcular objetos e imagens de uma função, dada a sua expressão algébrica ou a sua representação gráfica

Recursos para o professor:	**Recursos para o aluno:**
▪ Manual escolar ▪ Tarefa "Funções no GeoGebra" ▪ Computador com o *software* GeoGebra e projetor ▪ Quadro e marcador	▪ Tarefa "Funções no GeoGebra" ▪ Material de desenho e escrita ▪ Manual escolar ▪ Folhas quadriculadas

Metodologia de trabalho:
- Introdução do trabalho a realizar, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução das questões do manual escolar, trabalho autónomo dos alunos, individual ou a pares (de acordo com a disposição na sala de aula).

Momentos da aula:

	Momentos da aula	**Tempo previsto** (em 45 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	4 min
2.º	Discussão em grande grupo e resolução da Tarefa "Funções no GeoGebra" e sistematização	15 min
3.º	Trabalho autónomo na resolução das questões 1 e 2 do manual escolar, página 169	5 min
4.º	Discussão em grande grupo e resolução no quadro das questões 1 e 2	5 min
5.º	Trabalho autónomo na resolução da questão 3 do manual escolar, página 169	8 min

6.º	Discussão em grande grupo da questão 3 do manual escolar, página 169	6 min
7.º	Encerramento da aula	2 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças	**| 4 minutos**

Antes do início da aula a professora deverá acautelar o funcionamento do seu computador e do projetor. Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos e ditará o sumário, enquanto contará com a colaboração da colega de estágio para o registo dos alunos que realizaram o trabalho de casa, para a distribuição das tarefas “Funções no GeoGebra” e de folhas quadriculadas (onde os alunos farão os seus registos escritos nesta aula).

2.º - Discussão em grande grupo e resolução da Tarefa e sistematização	**| 15 minutos**

A professora deverá começar por questionar os alunos “*Que tipos de função conhecem? Que tipos de função vimos na aula anterior?*”, como o objetivo que se recordem das designações de função constante, linear e afim, articulando com a discussão da alínea 1.1 da tarefa da aula anterior,

A professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Observar a representação gráfica de funções constantes, lineares e afins.
- Reconhecer como traçar uma reta a partir de dois pontos
- Consolidar a noção de representação gráfica de uma função afim como translação de uma função linear
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, consolidando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio, a escrita e o gosto pela Matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Como foi trabalhar com o GeoGebra? Todos conseguiram resolver esta questão? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q1.1:** Como a grande maioria dos alunos resolveu esta questão, a professora deve apenas questionar se existiram dificuldades ao fazer estas representações com recurso ao GeoGebra. A professora deve questionar os alunos “*Que tipo de função é a $a(x)$, a $f(x)$ e a $h(x)$?*” e pedir que registem no caderno as expressões algébricas das funções a, f e h, anotando que são, respetivamente, função constante, linear e afim.
- **Discussão Q1.2:** Nesta questão alguns alunos não marcaram bem os pontos, por isso, obtiveram a equação de uma reta diferente da que se pretendia, pelo que, este aspeto terá maior destaque nesta discussão. Em interação com os alunos, a professora deverá frisar que o gráfico de uma função afim é uma reta, questionando *“Quantos pontos são necessários para traçar uma reta?”,* com o objetivo de que os alunos digam que precisamos conhecer dois pontos. Aqui, a professora deverá recorrer ao GeoGebra para mostrar que um só ponto não é suficiente para definir uma reta, por exemplo, questionando “*Quantas retas podem passar num ponto?”*. Assim, com recurso ao GeoGebra, a professora traçará diversas retas (distintas) que passam num mesmo ponto e, posteriormente, deverá questionar *“E se tiver dois pontos? Podem passar duas retas distintas por esses pontos?”.* Ao marcar dois pontos distintos com recurso ao GeoGebra, e ao traçar a reta que os contém, os alunos deverão observar que, se tiver dois pontos distintos, tenho uma única reta que os contém. Para prosseguir na discussão desta questão será interessante que a professora questione dois alunos (representativos do par) e registe no quadro a equação da reta que cada um dos pares obteve, garantido que um dos pares indica a equação de uma reta diferente da que passa nos pontos em questão. Aqui, o objetivo será salientar que nesta última situação os pontos não foram bem marcados, caso contrário as retas seriam as mesmas (a professora deverá traçar estas retas no GeoGebra, para exemplificar). Finalmente, em interação com os alunos, a professora deverá resolver no quadro a equação $2x + y = 11$ em ordem a y, com o objetivo de destacar que $y = -2x + 11$ é a equação reduzida da reta (por ser da forma $y = ax + b$), enfatizando que -2 é o declive da reta, e 11 a ordenada na origem.
- **Discussão Q1.3.1:** A professora deverá pedir a três alunos que indiquem a expressão da função, cujo gráfico é paralelo ao gráfico da função constante que traçaram, oralmente, e ficará encarregue de introduzi-las no ficheiro GeoGebra do seu computador como o objetivo de que todos os alunos vejam

que as retas são todas paralelas. Com o objetivo de que os alunos consolidem a noção de função constante, a professora deverá pedir aos alunos as coordenadas de dois ou três pontos do gráfico de uma das funções constantes representadas (por exemplo $a(x) = 8$) e registá-las no quadro. Assim, em interação com os alunos, a professora deverá sublinhar que a ordenada desses pontos será sempre a mesma (neste caso, 8).

- **Discussão Q1.3.2:** A professora solicitará a um aluno que vá ao seu computador explicar a sua resposta. Aqui, em interação com os alunos, a professora deverá destacar que tal como o gráfico de uma função afim se obtém a partir do de uma linear, por translação segundo um vetor, também o gráfico de uma função linear se obtém por translação do gráfico de uma função afim. Ficará ainda a cargo da professora escrever a expressão algébrica da função h e da nova função, destacando que a ordenada na origem é 6, pelo que, se o gráfico da função afim se deslocar seis unidades para baixo, obtém-se a representação gráfica da função linear.
- **Discussão Q1.3.2:** A professora deverá pedir a três alunos que digam as expressões das funções que representaram, garantindo que são distintas, e registá-las no quadro. Em seguida, deverá analisar as expressões algébricas com os alunos, enfatizando que são do tipo ax (com a constante), e inseri-las no ficheiro GeoGebra do seu computador, projetando-o, para fazer notar que todas passam na origem do referencial e que a imagem de 1 por cada uma das funções é a - ou seja, é uma função linear.

Para sintetizar, a professora questionará os alunos sobre o tipo de funções que trabalharam na aula, relembrando a que a função afim se obtém a partir da linear, por soma de uma constante. Este será o momento oportuno que os alunos possam esclarecer as suas dúvidas. Para finalizar este segmento, a professora deve questionar: "*Que tipos de função conhecem?",* com o objetivo de que os alunos se recordem das designações de função constante, linear e afim. A professora deverá escrever uma expressão geral destas funções no quadro para que os alunos registem no caderno.

3.º - Trabalho autónomo na resolução das questões 1 e 2 do manual escolar, página 169 | 5 minutos

A professora deve informar os alunos que irão trabalhar a pares e que deverão resolver as questões do manual propostas nas folhas quadriculadas que lhes foram entregues no início da aula, escrevendo o seu nome e número. Ficará também a cargo da professora recordar que não deverão apagar qualquer registo e lembrar que no final da aula irá recolher as folhas quadriculadas.

A professora circulará pela sala com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades (privilegiando o questionamento), e de monitorizar o seu trabalho, acautelando possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, evitando validar as suas respostas, e caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. A professora deve ainda atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro.

Os aspetos mencionados estendem-se para os restantes segmentos de trabalho autónomo.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	**Estratégias 1:** Como as três retas são paralelas terão todas o mesmo declive. - Relacionar que a ordenada do ponto R é a ordenada na origem da reta *r* e como tal a expressão algébrica será $f(x) = 0{,}8x + 1{,}2$. De modo análogo a expressão algébrica da função *h* será $h(x) = 0{,}8x - 0{,}6$. - As retas *r* e *t* são obtidas a partir da translação segundo um vetor (0,b) da reta s. A reta *r* é obtida segundo o vetor (0; 1,2) e a reta *t* é obtida segundo o vetor (0;-0,6). E, portanto, as respetivas expressões algébricas serão $f(x) = 0{,}8x + 1{,}2$ e $h(x) = 0{,}8x - 0{,}6$. **Dificuldades 1:** -Interpretar o enunciado.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 1:** - A reta *r* corresponde ao gráfico de que função? E a reta *t?* E a *s?* - O que significa as três retas serem

	- Em associar a reta r à função f, a reta s à função g, e a t à h. - Ao não identificar g como função linear e f e h como afins. - Ao não reconhecer que r se obtém de s por translação segundo o vetor (0;1,2), e que t se obtém de s por translação segundo o vetor (0;-0,6). -Em perceber que como r, s e t são retas paralelas, o coeficiente das respetivas funções é o mesmo.	paralelas? - Qual é o coeficiente de *x* da função g?
2	**Estratégias 2:** Relacionar que o declive é o valor do coeficiente de x da função e a ordenada na origem é o valor da ordenada do ponto de coordenadas (0,1), ou o valor da interseção da reta com o eixo das ordenadas. A expressão algébrica será $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. **Dificuldades 2:** - Interpretar o enunciado. - Em relacionar que o declive é o valor do coeficiente de x. - Em relacionar que a ordenada na origem é o valor da ordenada do ponto de coordenadas (0,1) ou que é o valor da interseção da reta com o eixo das ordenadas. - Em substituir corretamente o valor de a e de b na equação da reta. - Ao relacionar a equação da reta com a expressão algébrica da função.	**Apoio a prestar 2:** - O que é pedido? - O que precisamos de saber para escrever a expressão algébrica? - O que é o a? E o b? - Que informações conseguimos tirar a partir da observação do gráfico? Esta será a representação gráfica de que tipo de função?

4.º - Discussão em grande grupo e resolução no quadro das questões 1 e 2 | 5 minutos

Após dar por concluído o primeiro momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Representar algebricamente e graficamente uma função afim
- Representar algebricamente uma função afim, dada uma função linear e as respetivas representações gráficas.
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

Discussão Q1: A professora deverá chamar dois alunos ao quadro para cada um responder a cada uma das expressões algébricas, pedindo que expliquem as suas respostas aos colegas. No final, deverá ficar claro para os alunos que retas paralelas têm o mesmo declive e que o valor da ordenada na origem é o valor da interseção da reta com o eixo das abcissas, isto é, o ponto (0, b). Como a função g é linear e as funções f e h são afins (com os gráficos paralelos ao gráfico de g), a professora deverá enfatizar que ambas as expressões algébricas serão da forma, $0{,}8x + b$.

- **Discussão Q2:** Outro aluno é chamado pela professora a participar oralmente, que depois questionará se existem outras justificações. Aqui, a professora deverá, em interação com os alunos, destacar que, como já foi referido na questão anterior, a reta s passa no ponto (0,1) e portanto sabemos, imediatamente, que o valor da ordenada na origem da expressão algébrica correspondente é 1. Logo, a resposta a esta questão é obtida pela simples substituição dos parâmetros declive e ordenada na origem na equação y=ax+b.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na folha quadriculada, fazendo a correção das questões no caderno diário.

5.º - Trabalho autónomo na resolução da questão 3 do manual escolar, página 169 | 8 minutos

A professora circulará pela sala com o objetivo de apoiar e monitorizar o trabalho dos alunos e deverá atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados, pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
3	**Estratégias 3.a):** -Substituir $f(x)$ por 13, obtendo $2x+1=13$. Ao resolver a respetiva equação de 1º grau, deverão concluir que $x=6$. - Tentativa e erro. **Dificuldades 3.a):** - Interpretação do enunciado. - Ao confundir as noções de objeto e imagem. - Na resolução da equação de 1º grau. - Utilizar a expressão algébrica da função g ao invés da expressão da função f.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 3.a):** - O que é pedido? - Deveremos usar a expressão algébrica de que função? - O que é o objeto de uma função? E a imagem?
	Estratégias 3.b): -Substituir x por 0 em ambas as funções obtendo, $2\times0+1=1$ e $-2\times0+3=3$, respetivamente. - Substituir x por -1em ambas as funções obtendo, $2\times(-1)+1=-1$ e $-2\times(-1)+3=5$, respetivamente. **Dificuldades 3.b):** - Interpretação do enunciado. - Ao confundir objeto com imagem. -Resolução incompleta, por exemplo, resolver para apenas para uma das funções.	**Apoio a prestar 3.b):** Análogo à Q3.a)
	Estratégias 3.c): - Pela resolução da alínea anterior, o gráfico da função f interseta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 1. O gráfico da função g interseta o eixo das abcissas no ponto de ordenada 3. - O gráfico da função f interseta o eixo dos xx quando a ordenada é 0, logo deverão resolver a equação $2x+1=0$, obtendo $x=-\frac{1}{2}$. - O gráfico da função g interseta o eixo dos xx quando a ordenada é 0, logo deverão resolver a equação $-2x+3=0$, obtendo $x=\frac{3}{2}$. **Dificuldades 3.c):** São esperadas bastantes dificuldades na resolução desta alínea, tais como: - Interpretação do enunciado. - Não relacionarem que a interseção do gráfico de uma função com o eixo dos yy é quando o $x=0$. - Não relacionarem que a interseção do gráfico de uma função com o eixo dos xx é quando o $y=0$. - Resolução da equação de 1º grau. - Resolução incompleta, por exemplo resolver apenas para uma das funções.	**Apoio a prestar 3.c):** - O que é pedido? - O que significa a interseção do gráfico com um dos eixos? - Quando um gráfico interseta o eixo dos xx qual é a sua ordenada? E quando interseta o eixo dos yy qual é a sua abcissa?
	Estratégias 3.d): - Pelas alíneas anteriores, deverão utilizar dois pares de pontos para traçar cada uma das retas. **Dificuldades 3.d):** - Na escolha dos pares dos pontos. - Na escala do referencial.	**Apoio a prestar 3.d):** - Que pontos vais utilizar? - Qual a escala que vais utilizar em cada um dos eixos? - Que tipo de funções são as funções f e g?

6.º - Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 3 | 6 minutos

A professora, após dar por concluído o segundo momento de trabalho autónomo, deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Representar graficamente uma função afim
- Determinar a interseção do gráfico de uma função afim com os eixos coordenados

- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos
- Promover a comunicação, o raciocínio, a escrita Matemática, e o espírito crítico dos alunos

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

Discussão Q3.a): A professora deve pedir a um aluno que apresente a sua resolução no quadro mostrando todos os passos que efetuou para chegar ao resultado final, explicando aos colegas a sua resolução. No final deste momento, a professora deve garantir que os alunos sabem indicar objetos e imagens, dada a expressão algébrica de uma função.

- **Discussão Q3.b):** A professora deve pedir a dois alunos que respondam oralmente, cada um para cada um dos objetos. Os alunos além de darem a resposta devem explicar que processo utilizaram para a obter. A professora deve questionar se algum dos colegas obteve outra resposta ou utilizou outro método para a obtenção da mesma. A professora deve, também, se necessário, clarificar eventuais dúvidas.
- **Discussão Q3.c):** Por ser um dos primeiros momentos onde será resolvida uma questão desta natureza, são esperadas bastantes dificuldades, principalmente na interpretação do enunciado. Como tal a professora deve projetar um referencial e conduzir esta discussão pedindo a colaboração de alguns alunos. Questionando: *O que significa um gráfico intersetar um dos eixos coordenados? Que características particulares têm estes pontos?* Aqui, a professora deverá enfatizar que um par ordenado é do tipo (x, y), questionando os alunos, a título de exemplo: *O ponto ($\frac{1}{5}$,0) marca-se sobre algum dos eixos? E o ponto (0, -2)?*.
- **Discussão Q3.d):** A professora projetará um referencial e solicitará a um aluno que vá ao quadro responder a esta questão, explicando aos colegas a escolha e marcação dos pontos. A professora deve certificar-se que os alunos identificam corretamente o eixo das abcissas e o eixo das ordenadas, mas também que compreendem como se representam graficamente funções, a partir da sua expressão algébrica. Neste momento poderá ser ainda oportuno trabalhar o sentido crítico dos alunos, ao questionar: *Que tipo de função representam as expressões de f e g? As representações gráficas podem ser as que obtivemos?* Isto, com o intuito de envolver a turma e relacionar a representação gráfica de uma função afim como uma reta que não passa na origem do referencial, dando bastante enfase ao facto de o termo independente coincidir com a ordenada do ponto em que a reta interseta o eixo dos yy.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na folha quadriculada, fazendo a correção das questões no caderno diário.

7.º Encerramento da aula	| 2 minutos

A professora deverá recolher as folhas quadriculadas e informar que estas serão entregues na aula seguinte. Caso os alunos não concluam em sala de aula todas as questões do manual escolar propostas, estas serão sugeridas como trabalho de casa para a aula seguinte.

Formas e momentos de avaliação:

Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback*, serão recolhidas as produções escritas dos alunos, bem como serão anotados na grelha da turma as participações e trabalhos de casa.

Anexo 3.6 – Planificação da 6.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 6.º Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 123 e 124 — 14 de abril de 2016

Sumário: Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa.
Cálculo analítico do declive: resolução de exercícios.

Duração da aula: 90 minutos

Objetivos:

- Identificar o coeficiente de uma função linear como o declive de uma reta
- Consolidar a noção de que as retas não verticais que passam na origem representam gráficos de funções lineares
- Reconhecer e calcular o declive de uma reta como $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, para $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pontos da reta, e $x_B \neq x_A$
- Reconhecer retas paralelas como retas que têm o mesmo declive
- Resolver problemas com a função afim, com recurso ao *software* GeoGebra

Conhecimentos prévios dos alunos:

- A noção de função e conceitos como: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto, declive e ordenada na origem
- As funções: constante, linear e afim

Recursos para o professor:	Recursos para o aluno:
▪ Tarefa "Um passeio de bicicletas" ▪ Computador com o *software* GeoGebra e projetor ▪ Manual escolar ▪ Quadro e marcador	▪ Tarefa "Um passeio de bicicletas" ▪ Computador com o *software* GeoGebra ▪ Material de desenho e escrita ▪ Folhas quadriculadas ▪ Guião do GeoGebra ▪ Manual escolar

Metodologia de trabalho:

- Introdução ao cálculo analítico do declive, introdução da tarefa, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução da tarefa e das questões do manual escolar, trabalho autónomo dos alunos a pares, na sala de informática da escola.

Momentos da aula:

	Momentos da aula	Tempo previsto (em 90 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	5 min
2.º	Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa	10 min
3.º	Introdução ao cálculo analítico do declive	15 min
4.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução de questões do manual escolar	15 min
5.º	Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados	10 min
6.º	Apresentação da Tarefa "Um passeio de bicicletas" e trabalho autónomo dos alunos na resolução da mesma	23 min

7.º	Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados da Tarefa	10 min
8.º	Encerramento da aula	2 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças	**| 5 minutos**

Como o funcionamento dos computadores e do *software* GeoGebra será crucial para o desenvolvimento da aula, antes do início da mesma, a professora deverá acautelar o funcionamento destes dispositivos e do projetor.

Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos, ditará o sumário.

2.º - Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa	**| 10 minutos**

A professora deverá perguntar aos alunos se existiram dúvidas na resolução do trabalho de casa, e deverá resolver as questões que levantaram dúvidas no quadro, ou oralmente, em grande grupo, com o objetivo de clarificar os alunos. A professora deverá recordar os alunos, que não realizaram o trabalho de casa, que devem fazê-lo porque será um importante elemento de consolidação dos conteúdos trabalhados.

Nesta discussão os alunos podem revelar dificuldades em determinar os pontos do gráfico que intersetam os eixos uma vez que ainda não foi muito explorado em sala de aula. Caso se verifique, a professora deverá fazer uma explicação alargada, enfatizando que qualquer ponto do gráfico de uma função que esteja sobre o eixo das abcissas tem ordenada nula e, do mesmo modo, qualquer ponto do gráfico de uma função que esteja sobre o eixo das ordenadas tem abcissa nula – isto, recorrendo a exemplos concretos.

A professora terá também em atenção a análise que realizou das tarefas de consolidação que os alunos resolveram, podendo ser necessário alguma explicação mais alargada por parte da professora.

Neste momento, a colega de estágio irá registar os alunos que realizaram a tarefa proposta para casa.

3.º - Introdução ao cálculo analítico do declive	**| 15 minutos**

A professora deve ter em atenção os principais objetivos que pretende alcançar com este segmento inicial:

- Observar que, pelo Teorema de Tales, a razão entre a ordenada e abcissa dos pontos de uma reta que passa pela origem é sempre igual, pelo que se trata do gráfico de uma função linear
- Calcular analiticamente o declive de uma reta, dados dois pontos da mesma

Ao recorrer ao *software* GeoGebra, a professora deve projetar um referencial, com uma função linear ($y = 2x$) sem apresentar a sua expressão algébrica, com os pontos (0,0), (1,2) e (3,6) marcados, questionando a turma: *"Esta é uma representação gráfica de uma função de que tipo?"*, com o objetivo de envolver os alunos nesta discussão, evidenciando que como a reta passa na origem do referencial, é o gráfico de uma função linear.

Neste momento é importante que as perguntas sejam mais diretas para que a professora consiga dirigir a discussão, tendo em vista o objetivo que pretende alcançar. De seguida deve questionar: *"Qual é o coeficiente de x?", "Qual a expressão algébrica desta função?"*. A professora deve, novamente, reforçar que o coeficiente de x é o valor de f(1) e escrever no quadro a expressão $y = 2x$, garantindo que todos os alunos percebem como se obteve a respetiva expressão algébrica, ao evidenciar que f(1)=2, e reforçar que, como foi falado nas aulas anteriores, o valor de a designa—se por **declive**, enfatizando também o uso da terminologia **equação reduzida da reta.**

Após a obtenção da equação reduzida da reta, a professora deve questionar: *"E se não utilizarmos o ponto (1,2)? Se, por exemplo, utilizarmos o ponto (3,6), como obtemos o valor do declive para escrevermos a respetiva equação da reta?".*

Com este questionamento, o objetivo é levar a que os alunos se apercebam que na equação reduzida de uma reta que passe na origem, podem utilizar qualquer ponto para a obter do valor do declive, uma vez que o quociente entre a ordenada e a abcissa de qualquer ponto da reta é o mesmo (neste caso, 2).

A professora deve traçar os dois segmentos de reta paralelos ao eixo dos yy, obtidos a partir da união do ponto (1,0) ao ponto (1,2), e do ponto (3,0) ao ponto (3,6), salientando que formam dois triângulos que são semelhantes, pelo Critério AA. Deste modo, poderemos afirmar, pelo Teorema de Tales, que **a razão entre a ordenada e abcissa dos pontos de uma reta que passa pela origem é sempre igual, pelo que se trata do gráfico de uma função linear, acrescentando ainda que a esta razão se designa por declive da reta**.

A professora deve agora projetar no mesmo referencial uma reta paralela à inicial que passe no ponto (0, 3) e questionar os alunos: *E se for uma reta desta forma, como calculamos o declive? Podemos fazer a razão entre a ordenada e a abcissa de um ponto?".* A professora deve escolher o ponto (1, 5) mostrando que o declive daria 5 ao invés de 2 e, portanto, como as retas são paralelas teriam o mesmo declive, o que não sucede. Isto, com o objetivo de alcançar que para uma reta que não passe na origem não se consegue calcular o declive da mesma forma, e portanto, a professora deverá dizer aos alunos que irão ver como calcular o declive de uma reta.

De seguida a professora deve explicar que para retas que não passam na origem do referencial o seu declive é calculado a partir de uma expressão e que apenas será necessário conhecermos dois pontos da reta, escrevendo no quadro:

Dados dois pontos, $\boldsymbol{A(x_A, y_A)}$ e $\boldsymbol{B(x_B, y_B)}$ distintos pertencentes a uma reta r, o declive da reta é obtido através do cálculo de $\boldsymbol{\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$, com e $x_B \neq x_A$

Retomando o exemplo, a professora exemplifica então como determinar o declive da reta que passa pelos pontos (0,3) e (1,5) e calcula $a = \frac{5-3}{1-0} = 2$, mostrando que desta forma o declive é 2, tal como tinha sido obtido na equação linear paralela a esta, dada inicialmente.

Em interação com a turma a professora deve pedir aos alunos para escolherem dois pontos da reta com o objetivo de mostrar aos alunos que podem sempre escolher dois pontos quaisquer e que a expressão para o cálculo do declive é sempre válida.

Por fim, a professora deve pedir aos alunos que registem estes exemplos no caderno diário, questionando se existem dúvidas. Caso os alunos revelem muitas dúvidas a professora deverá dar outro exemplo, como: *"Se quiséssemos calcular o declive de uma reta que passe nos pontos de coordenadas (6,7) e (-1,13), como faríamos?".* Em interação com os alunos, a professora deve fazer o cálculo analítico do declive desta reta no quadro, obtendo-se que o declive é $-\frac{6}{7}$.

4.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução de questões do manual escolar	**| 15 minutos**

Ao iniciar este segmento, os alunos serão informados do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho, a pares. A professora deve informar os alunos que irão resolver questões do manual para trabalharem o cálculo analítico do declive, e dará a indicação que devem realizar essas questões nas folhas quadriculadas, distribuídas no início da aula. A professora deverá referir aos alunos que dispõem de 15 minutos para resolver as questões 6.b), 6.d) e 3 da página 174 do manual escolar, informando que após este segmento se iniciará um momento de discussão, e irá reforçar que os alunos não devem apagar os seus registos das fichas de trabalho e, caso se enganem, devem fazer um traço por cima.

A professora circulará pela sala com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades (privilegiando o questionamento), e de monitorizar o seu trabalho, acautelando possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, evitando validar as suas respostas, e caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. A professora deve ainda atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
6	**Estratégias 6.b):** - Identificar que uma reta é determinada por dois pontos e reconhecer que para calcular o declive de uma reta precisam conhecer dois pontos da mesma reta. Como se pretende o declive da reta EF, identificar que a reta passa nos pontos E e F. Observar que 2 e -3 são abcissas dos pontos E e F, respetivamente, e que 5 e 3 são as ordenadas dos mesmos pontos. Então, calcular o declive, a, da reta ao recorrer à expressão $\frac{y_F - y_E}{x_F - x_E}$, obtendo que $a = \frac{3-5}{-3-2}$, resultando $a = \frac{2}{5}$, ou seja, que o declive da reta EF é $\frac{2}{5}$. - Seguindo uma estratégia semelhante à anterior, alguns alunos poderão calcular separadamente $y_F - y_E = -2$ e $x_F - x_E = -5$, obtendo por fim $a = \frac{2}{5}$. - Alguns alunos podem calcular o declive, procedendo de modo análogo às estratégias anteriores, recorrendo à expressão $\frac{y_E - y_F}{x_E - x_F}$, resultando do mesmo modo $a = \frac{2}{5}$. **Dificuldades 6.b):** Por ser a primeira questão de trabalho autónomo com o cálculo analítico do declive os alunos poderão revelar algumas dificuldades: -Em identificar a expressão do cálculo analítico do declive. -No cálculo de expressões algébricas - Ao identificar as abcissas e ordenadas dos pontos. **Estratégias 6.d):** Análogas à questão 6.b), obtendo-se, neste caso, que $a = 1$. **Dificuldades 6.d):** Análogas a 6.b).	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 6.b):** -Como é que estás a pensar? -Se quisermos calcular analiticamente o declive de uma reta, precisamos de conhecer as coordenadas de quantos pontos? - Quais são as coordenadas dos pontos F e E? Quais as abcissas? E as ordenadas? -Que expressão nos permite calcular o declive de uma reta se conhecermos as coordenadas de dois dos seus pontos? -Apoiar os alunos no cálculo de expressões algébricas. **Apoio a prestar 6.d):** Análogo a 6.b).
3	**Estratégias 3.a):** - Reconhecer que para calcular o declive de uma reta precisam conhecer dois pontos da mesma reta e observar na representação gráfica da reta r os pontos da reta de coordenadas $(0; -1)$ e $(1; 3)$.Observar que 0 e 1 são abcissas dos pontos, respetivamente, e que -1 e 3 são as ordenadas dos mesmos pontos. Então, calcular o declive, a, da reta r ao determinar o declive, pela sua expressão analítica, como $a = \frac{3-(-1)}{1-0}$, resultando que o declive da reta r é 4. - Podem seguir também estratégias análogas às identificadas em 6.b). **Dificuldades 3.a):** - Análogas a 6.b). - Em reconhecer que precisam conhecer dois pontos da reta. -Em identificar as coordenadas de dois pontos da reta r, dada a sua representação gráfica. **Estratégias 3.b):** Identificar que o valor da ordenada na origem é a ordenada	**Apoio a prestar 3.a):** - Como estás a pensar? -Para calcularmos o declive de uma reta o que precisamos conhecer? - Conseguimos observar dois pontos que estejam na reta r? Quais as suas coordenadas? - Análogo a 6.b). **Apoio a prestar 3.b):** -Como estás a pensar?

	do ponto em que a reta interseta o eixo dos yy, ou seja, reconhecer -1 como ordenada na origem. **Dificuldades 3.b):** - Reconhecer o que é a ordenada na origem. **Estratégias 3.c):** - Indicar $y = ax + b$ como a equação reduzida de uma reta. Ao identificar a como o declive, $a = 4$, e b como a ordenada na origem, $b = -1$, escrever como equação da reta $y = 4x - 1$. **Dificuldades 3.c):** - Em recordar a expressão da equação reduzida de uma reta. - Ao identificar a como o declive da reta e/ou b como a ordenada na origem. - Ao trocar o declive com a ordenada na origem. -Caso tenha respondido de forma incorreta às alíneas anteriores.	- A reta r é a representação gráfica de uma função de que tipo? O que representará o b? -O que achas que é a ordenada na origem? - A reta r interseta o eixo dos yy em algum ponto? **Apoio a prestar 3.c):** - Como estás a pensar? - A reta r é a representação gráfica de uma função de que tipo? - Como é a equação reduzida de uma reta? O que representa o a? E o b? - Que dados já conhecemos da reta r? Existe alguma expressão que relacione/inclua o declive e a ordenada na origem?

5.º - Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados | 10 minutos

Após dar por concluído o primeiro momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Trabalhar o cálculo analítico do declive
- Escrever a equação de uma reta, dada a sua representação gráfica
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, consolidando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário e deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q.6.b):** Esta questão pode originar diversos comentários por parte dos alunos já que é a primeira questão de aplicação que os alunos resolvem de cálculo analítico do declive. A professora deve pedir a um aluno que vá ao quadro explicar a sua resposta, garantindo que está correta para não gerar confusão nos alunos nesta fase inicial. A professora deve questionar se alguém resolveu de outro modo e, caso algum par de alunos tenha optado por calcular $\frac{y_E - y_F}{x_E - x_F}$, deve, no quadro, resolver em interação com os alunos, frisando que em ambos os casos obteríamos o mesmo valor para o declive.
- **Discussão Q6.d):** Outro aluno (em representação do par) é chamado pela professora a participar oralmente, que depois questionará se existem outras justificações. Aqui, se muitos alunos revelarem dificuldades, a professora deverá fazer uma explicação alargada à turma, quer para enfatizar o cálculo analítico do declive, quer para clarificar o cálculo de expressões numéricas com números racionais.
- **Discussão Q3.a):** Na discussão desta questão a figura com o referencial deve ser projetado no quadro e a professora deve pedir a um aluno que vá ao quadro explicar como o par pensou. Nesta discussão a professora deverá enfatizar que, se tivermos a representação gráfica de uma reta e quisermos calcular analiticamente o seu declive é necessário identificarmos as coordenadas de dois pontos da reta. Neste caso a professora deve destacar que apenas conseguíamos reconhecer as coordenadas dos pontos $(0;\ -1)$ e $(1; 3)$ mas que poderíamos recorrer a quaisquer outros dois pontos desta reta, desde que conseguíssemos identificar as suas coordenadas.
- **Discussão Q3.b):** A resposta a estas alíneas deverá ser dada oralmente por um aluno, que por sua vez deverá explicar como o par pensou. Nesta discussão a professora deverá enfatizar, com recurso à figura que está projetada as coordenadas do ponto onde a reta interseta os eixos dos yy, (0; -1).
- **Discussão Q3.c):** No seguimento da alínea anterior, um outro aluno deve expor a resposta do par oralmente. Neste segmento, a professora deve chamar à atenção para a equação de uma reta, em particular, deve questionar os alunos *Conhecem uma equação de uma reta que em que consigamos*

identificar o declive e a ordenada na origem?, com o objetivo de fazer referência à equação reduzida de uma reta e de destacar o a como o declive e o b como a ordenada na origem, ou seja, a ordenada do ponto em que a reta interseta o eixo dos yy. Aqui, a professora deverá fazer articulação com o que os alunos têm trabalhado nas aulas anteriores, nomeadamente, recordando, em interação com os alunos que uma reta daquele tipo é a representação gráfica de uma função afim.

Ao articular este segmento com o momento inicial da aula e o cálculo analítico do declive, a professora deverá questionar: *Quantos pontos de uma reta precisamos conhecer para calcular analiticamente o declive? Se tiver uma reta em que estão assinalados 4 pontos, que pontos devo escolher para calcular o declive?* Face às interações dos alunos, a professora deverá recordar quaisquer dois pontos de uma reta me permitem calcular o seu declive, frisando que este cálculo tem por base a diferença das ordenadas sobre a diferença das abcissas.

6.º - Apresentação da Tarefa e trabalho autónomo dos alunos na resolução da mesma | 23 minutos

Ao distribuir a Ficha de Trabalho por todos os alunos, estes serão informados pela professora que irão trabalhar a pares na resolução da tarefa e que cada par terá disponível um computador caso considere ser necessário para a resolução da mesma. Nesta ocasião, a professora irá reforçar que os alunos não devem apagar os seus registos da folha de respostas e, caso se enganem, devem fazer um traço por cima.

A professora solicitará a um aluno que leia para a turma a primeira questão da tarefa, questionando se existem dúvidas no que leram, solicitando, nesse caso, a outro aluno que explique a situação proposta para o colega. Após este segmento, a professora indicará que os alunos dispõem de 20 para trabalhar autonomamente, lembrando que ficará a seu critério recorrer ao *software* GeoGebra e ao Guião distribuído nas aulas anteriores, fazendo referência que a esse momento se seguirá uma discussão em grande grupo.

Durante a resolução autónoma dos alunos e no momento de discussão a tarefa será projetada no quadro branco, sendo um auxílio, sobretudo, aquando a apresentação dos resultados.

A professora deve monitorizar este trabalho autónomo nos mesmos moldes do segmento de trabalho autónomo anterior.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	Tendo em conta o caráter destas questões as estratégias dos alunos poderão ser mais diversificadas do que as aqui apresentadas. **Estratégias 1.1:** - Recorrer ao GeoGebra, identificar o eixo das abcissas como o tempo (em horas) e o eixo das ordenadas como o custo (em euros), traçar o gráfico da função m e, por observação da tabela, marcar dois pontos e traçar a semirreta correspondente ao gráfico da função p. Por observação das representações gráficas indicar que, para uma hora, será mais vantajoso fazer o aluguer na empresa M. - Recorrer à expressão algébrica da função M e calcular a imagem de 1, obtendo 7. Através dos dados indicados na tabela, calcular analiticamente o declive da semirreta que representa graficamente a situação da empresa P, obtendo que o declive é 4. Ao reconhecer que 4 é o custo fixo do capacete, escrever a equação reduzida da reta $y = 4x + 4$, e indicar que $4 \times 1 + 4 = 8$, será o custo do aluguer de uma bicicleta por uma hora, na empresa P. Finalmente, indicar que a opção mais vantajosa é alugar a bicicleta na empresa M. **Dificuldades 1.1:**	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* Sempre que se justifique, a professora deve remeter para o guião do GeoGebra ou dar sugestões de utilização do recurso. **Apoio a prestar 1.1:** - Qual o teu raciocínio, explica-me como pensaste? -O que representa a função m? -Que informação conheces da empresa M? E da empresa P? - Como varia o custo do aluguer? Depende só do tempo do aluguer? - A situação da empresa P poderá ser

	- Ao recorrer à expressão algébrica de m e indicar que três horas de aluguer custam 19 euros e, por comparação com a tabela da empresa P, indicar que será mais vantajoso fazer o aluguer na empresa P. - Calcular, por exemplo, a razão $\frac{16}{3}$ e indicar que o custo do aluguer durante uma hora, na empresa P, é de aproximadamente, 5,33 euros e que esse valor será inferior ao cobrado pela empresa M. -Indicar que será mais vantajoso alugar a bicicleta na empresa P. -Não responder à questão.	traduzida por uma função? Como? - Se esse referencial estivesse sobre um quadriculado seria mais simples responder à questão?
	Estratégias 1.2: Mais geralmente, os alunos que não tentaram na alínea anterior escrever uma expressão algébrica para a função que representa a situação da empresa P, poderão agora fazê-lo. Ou ainda, ao recorrer ao GeoGebra, e após a marcação de dois pontos, traçar a semirreta que representa a situação da empresa P, observando a sua equação na *FolhaAlgébrica* do GeoGebra. Poderão ainda surgir as estratégias: - Ao traduzir a situação da empresa P por uma função p, observar que a representação gráfica de m tem maior inclinação em relação ao eixo do xx que p e que, portanto, o custo do aluguer por hora será maior que na empresa P. Por fim, indicar que não será sempre mais vantajoso alugar na empresa M, apesar de o valor adicional pago pelo capacete ser mais baixo nesta empresa. - Recorrer às representações gráficas que traduzem estas situações, tal como a estratégia mencionada para a alínea 1.1, e indicar que, num dado momento, passa a ser mais vantajoso efetuar o aluguer na empresa P, apesar do aluguer obrigatório do capacete ter um maior custo. Alguns pares de alunos poderão recorrer também ao GeoGebra e, determinar o ponto onde as duas semirretas se intersetam, (1,5;10). **Dificuldades 1.2:** - Ao recorrer ao argumento do valor fixo pago pelo aluguer do capacete. -Ao responder afirmativamente ou caso não justifique a resposta. -Não responder à questão.	**Apoio a prestar 1.2:** -Como é que estás a pensar? -Quanto pagaria um cliente se alugasse a bicicleta 1 hora, em cada uma das empresas? E se quisesse alugar 3 horas? - Estás a incluir nesse custo o valor pago pelo aluguer do capacete? - Se esse referencial estivesse sobre um quadriculado seria mais simples responder à questão? -Conseguiremos com recurso ao GeoGebra conhecer as coordenadas desse ponto? Tenta consultar a página 6 do Guião. - O que significam as coordenadas desse ponto?
	Estratégias 1.3: Pelo caráter aberto desta questão, poderá suscitar diversas argumentações, mais geralmente: -Ao observar a representação gráfica das suas situações os alunos poderão responder que se pretendermos alugar a bicicleta até uma hora e meia pagarão menos se alugarem na empresa M, se quiserem alugar uma hora e meia é indiferente a escolha da empresa pois pagarão o mesmo, e que, será mais vantajoso optar pela empresa P se o passeio durar mais que uma hora e trinta minutos. - Recorrer aos valores da tabela e indicar que para 7 horas de aluguer pagariam 32 euros na empresa P e 43 euros na empresa M, portanto será mais vantajoso optar pela empresa P. -Justificar que os amigos não irão alugar a bicicleta por mais de uma hora e portanto devem optar pelo aluguer na empresa M. **Dificuldades 1.3:** -É sempre mais vantajoso alugar na empresa M porque o custo do aluguer obrigatório do capacete é inferior ao pago na outra empresa. -Não responder.	**Apoio a prestar 1.3:** - Se quisesse alugar a bicicleta 5horas em que empresa seria mais vantajoso fazer o aluguer? E se quisesse alugar apenas uma hora? - Que características distintas apresentam as representações? Têm alguma característica comum? - O que significa neste contexto ponto de coordenadas (1,5;10) - Se esse referencial estivesse sobre um quadriculado seria mais simples responder à questão?

7.º - Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados da Tarefa | 10 minutos

A professora, após dar por concluído o segundo momento de trabalho autónomo, deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Reconhecer uma função afim em diferentes representações;
- Resolver problemas com a função afim;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação, o raciocínio, a escrita e o gosto pela Matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Quem recorreu ao GeoGebra? Todos conseguiram resolver esta questão? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

A professora deve também cuidar que as estratégias dos alunos não são exploradas de forma pormenorizada para não influenciar as estratégias na futura resolução de problemas.

- **Discussão Q1.1:** A professora deve solicitar a dois alunos (representativos de dois pares), um que tenha utilizado o recurso GeoGebra e outro que tenha resolvido analiticamente, que respondam oralmente. Ambos terão de justificar oralmente qual será o tarifário mais vantajoso, e quais em que dados basearam a sua resposta. A professora, com recurso ao GeoGebra, pode colocar uma grelha e mostrar a ordenada da abcissa 1 nas duas funções, com o intuito de esclarecer eventuais dúvidas que ainda persistam. Caso muitos alunos tenham interpretado os dados da empresa P como uma situação de proporcionalidade direta, a professora deve fazer uma explicação mais alargada para a turma, sublinhando o custo fixo do aluguer obrigatório do capacete.
- **Discussão Q1.2:** A professora deve, novamente, solicitar a dois alunos (representativos de dois pares) que respondam oralmente. Se possível, um dos alunos deve ter respondido afirmativamente e o outro discordado da afirmação. A professora deve envolver toda a turma nesta discussão, questionando: *"Concordas com qual dos teus colegas? E Porquê? Qual a vossa opinião?"*. Neste momento a professora deve ter a representação gráfica das duas funções, mas não deve dar grande enfase ao ponto de interseção de ambas, para não se diminuir o interesse na discussão da questão seguinte.
- **Discussão Q1.3**: Devido ao carácter mais aberto desta questão, a professora deverá pedir a dois ou três alunos que deem a sua opinião, mas que a justifiquem. A professora não deve induzir nenhuma das respostas e apenas monitorizar toda a discussão, devendo apenas alertar quando algum dos alunos apresentar uma justificação incorreta. A professora deverá projetar no GeoGebra a representação gráfica das duas funções, mostrando o ponto de interseção, com o objetivo de clarificar os alunos que só é vantajoso a partir do ponto (1.5;10), isto é, alugar a bicicleta na empresa M só será mais vantajoso até uma hora e meia de utilização e, portanto, a escolha da empresa deve ser feita dependendo do tempo que os amigos pretendem utilizar as bicicletas. A professora poderá recorrer à discussão desta alínea para clarificar a resposta às alíneas anteriores, se sentir que ainda existem dúvidas.

8.º Encerramento da aula |2 minutos

A professora deverá recolher o enunciado da Tarefa dos alunos bem como as folhas onde os alunos resolveram as questões do manual escolar e informar que estas serão entregues na aula seguinte.

Será feita uma proposta de trabalho de casa, que os alunos devem registar no caderno: questões 1 e 4 da página 171 e a questão 8 da página 174, do manual escolar.

Formas e momentos de avaliação:

Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback*, serão recolhidas as produções escritas dos alunos, bem como serão anotados na grelha da turma as participações e trabalhos de casa.

Anexo 3.7 – Planificação da 7.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 7.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 125 e 126 — 18 de abril de 2016

Sumário: Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa.
Realização de uma tarefa na sala de informática.
Exercícios do manual escolar: o declive de uma reta.

Duração da aula: 90 minutos

Objetivos:

- Consolidar o cálculo do declive de uma reta como $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, para $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pontos da reta, e $x_B \neq x_A$
- Resolver problemas com a função afim, com recurso ao *software* GeoGebra
- Reconhecer, a representação gráfica de uma reta com declive negativo
- Reconhecer que o declive da reta horizontal é nulo

Conhecimentos prévios dos alunos:

- A noção de função e conceitos como: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto, declive e ordenada na origem
- As funções: constante, linear e afim
- Cálculo analítico do declive
- Reconhecer retas paralelas como retas que têm o mesmo declive

Recursos para o professor:	**Recursos para o aluno:**
▪ Tarefa "Um passeio de bicicletas" ▪ Computador com o *software* GeoGebra e projetor ▪ Manual escolar ▪ Quadro e marcador	▪ Tarefa "Um passeio de bicicletas" ▪ Computador com o *software* GeoGebra ▪ Material de desenho e escrita ▪ Folhas quadriculadas ▪ Guião do GeoGebra ▪ Manual escolar

Metodologia de trabalho:

- Introdução da tarefa, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução da tarefa e das questões do manual escolar, trabalho autónomo dos alunos a pares, na sala de informática da escola.

Momentos da aula:

	Momentos da aula	**Tempo previsto** (em 90 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	5 min
2.º	Apresentação da Tarefa "Um passeio de bicicletas" e trabalho autónomo dos alunos na resolução da mesma	23 min
3.º	Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados da Tarefa	10 min
4.º	Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa	15 min

5.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução de questões do manual escolar	23 min
6.º	Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados	12 min
7.º	Encerramento da aula	2 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças | 5 minutos

Como o funcionamento dos computadores e do *software* GeoGebra será crucial para o desenvolvimento da aula, antes do início da mesma, a professora deverá acautelar o funcionamento destes dispositivos e do projetor.

Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos, ditará o sumário.

2.º - Apresentação da Tarefa e trabalho autónomo dos alunos na resolução da mesma | 23 minutos

Ao distribuir a Ficha de Trabalho por todos os alunos, estes serão informados pela professora que irão trabalhar a pares na resolução da tarefa e que cada par terá disponível um computador caso considere ser necessário para a resolução da mesma. Nesta ocasião, a professora irá reforçar que os alunos não devem apagar os seus registos da folha de respostas e, caso se enganem, devem fazer um traço por cima.

A professora solicitará a um aluno que leia para a turma a primeira questão da tarefa, questionando se existem dúvidas no que leram, solicitando, nesse caso, a outro aluno que explique a situação proposta para o colega. Após este segmento, a professora indicará que os alunos dispõem de 20 para trabalhar autonomamente, lembrando que ficará a seu critério recorrer ao *software* GeoGebra e ao Guião distribuído nas aulas anteriores, fazendo referência que a esse momento se seguirá uma discussão em grande grupo.

Durante a resolução autónoma dos alunos e no momento de discussão a tarefa será projetada no quadro branco, sendo um auxílio, sobretudo, aquando a apresentação dos resultados.

A professora deve monitorizar este trabalho autónomo nos mesmos moldes do segmento de trabalho autónomo anterior.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	Tendo em conta o caráter destas questões as estratégias dos alunos poderão ser mais diversificadas do que as aqui apresentadas. **Estratégias 1.1:** - Recorrer ao GeoGebra, identificar o eixo das abcissas como o tempo (em horas) e o eixo das ordenadas como o custo (em euros), traçar o gráfico da função m e, por observação da tabela, marcar dois pontos e traçar a semirreta correspondente ao gráfico da função p. Por observação das representações gráficas indicar que, para uma hora, será mais vantajoso fazer o aluguer na empresa M. - Recorrer à expressão algébrica da função M e calcular a imagem de 1, obtendo 7. Através dos dados indicados na tabela, calcular analiticamente o declive da semirreta que representa graficamente a situação da empresa P, obtendo que o declive é 4. Ao reconhecer que 4 é o custo fixo do capacete, escrever a equação reduzida da reta $y = 4x + 4$, e indicar que $4 \times 1 + 4 = 8$, será o custo do aluguer de uma bicicleta por uma hora, na empresa P. Finalmente, indicar que a opção mais vantajosa é alugar a bicicleta na empresa M.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* Sempre que se justifique, a professora deve remeter para o guião do GeoGebra ou dar sugestões de utilização do recurso. **Apoio a prestar 1.1:** - Qual o teu raciocínio, explica-me como pensaste? -O que representa a função m? -Que informação conheces da empresa M? E da empresa P? - Como varia o custo do aluguer? Depende só do tempo do aluguer?

	Dificuldades 1.1: - Ao recorrer à expressão algébrica de m e indicar que três horas de aluguer custam 19 euros e, por comparação com a tabela da empresa P, indicar que será mais vantajoso fazer o aluguer na empresa P. - Calcular, por exemplo, a razão $\frac{16}{3}$ e indicar que o custo do aluguer durante uma hora, na empresa P, é de aproximadamente, 5,33 euros e que esse valor será inferior ao cobrado pela empresa M. -Indicar que será mais vantajoso alugar a bicicleta na empresa P. -Não responder à questão.	- A situação da empresa P poderá ser traduzida por uma função? Como? - Se esse referencial estivesse sobre um quadriculado seria mais simples responder à questão?
	Estratégias 1.2: Mais geralmente, os alunos que não tentaram na alínea anterior escrever uma expressão algébrica para a função que representa a situação da empresa P, poderão agora fazê-lo. Ou ainda, ao recorrer ao GeoGebra, e após a marcação de dois pontos, traçar a semirreta que representa a situação da empresa P, observando a sua equação na *FolhaAlgébrica* do GeoGebra. Poderão ainda surgir as estratégias: - Ao traduzir a situação da empresa P por uma função p, observar que a representação gráfica de m tem maior inclinação em relação ao eixo do xx que p e que, portanto, o custo do aluguer por hora será maior que na empresa P. Por fim, indicar que não será sempre mais vantajoso alugar na empresa M, apesar de o valor adicional pago pelo capacete ser mais baixo nesta empresa. - Recorrer às representações gráficas que traduzem estas situações, tal como a estratégia mencionada para a alínea 1.1, e indicar que, num dado momento, passa a ser mais vantajoso efetuar o aluguer na empresa P, apesar do aluguer obrigatório do capacete ter um maior custo. Alguns pares de alunos poderão recorrer também ao GeoGebra e, determinar o ponto onde as duas semirretas se intersetam, (1,5;10). **Dificuldades 1.2:** - Ao recorrer ao argumento do valor fixo pago pelo aluguer do capacete. -Ao responder afirmativamente ou caso não justifique a resposta. -Não responder à questão.	**Apoio a prestar 1.2:** -Como é que estás a pensar? -Quanto pagaria um cliente se alugasse a bicicleta 1 hora, em cada uma das empresas? E se quisesse alugar 3 horas? - Estás a incluir nesse custo o valor pago pelo aluguer do capacete? - Se esse referencial estivesse sobre um quadriculado seria mais simples responder à questão? -Conseguiremos com recurso ao GeoGebra conhecer as coordenadas desse ponto? Tenta consultar a página 6 do Guião. - O que significam as coordenadas desse ponto?
	Estratégias 1.3: Pelo caráter aberto desta questão, poderá suscitar diversas argumentações, mais geralmente: -Ao observar a representação gráfica das suas situações os alunos poderão responder que se pretendermos alugar a bicicleta até uma hora e meia pagarão menos se alugarem na empresa M, se quiserem alugar uma hora e meia é indiferente a escolha da empresa pois pagarão o mesmo, e que, será mais vantajoso optar pela empresa P se o passeio durar mais que uma hora e trinta minutos. - Recorrer aos valores da tabela e indicar que para 7 horas de aluguer pagariam 32 euros na empresa P e 43 euros na empresa M, portanto será mais vantajoso optar pela empresa P. -Justificar que os amigos não irão alugar a bicicleta por mais de uma hora e portanto devem optar pelo aluguer na empresa M. **Dificuldades 1.3:** -É sempre mais vantajoso alugar na empresa M porque o custo do aluguer obrigatório do capacete é inferior ao pago na outra empresa. -Não responder.	**Apoio a prestar 1.3:** - Se quisesse alugar a bicicleta 5horas em que empresa seria mais vantajoso fazer o aluguer? E se quisesse alugar apenas uma hora? - Que características distintas apresentam as representações? Têm alguma característica comum? - O que significa neste contexto ponto de coordenadas (1,5;10) - Se esse referencial estivesse sobre um quadriculado seria mais simples responder à questão?

3.º - Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados da Tarefa | 10 minutos

A professora, após dar por concluído o segundo momento de trabalho autónomo, deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Reconhecer uma função afim em diferentes representações;
- Resolver problemas com a função afim;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação, o raciocínio, a escrita e o gosto pela Matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Quem recorreu ao GeoGebra? Todos conseguiram resolver esta questão? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

A professora deve também cuidar que as estratégias dos alunos não são exploradas de forma pormenorizada para não influenciar as estratégias na futura resolução de problemas.

- **Discussão Q1.1:** A professora deve solicitar a dois alunos (representativos de dois pares), um que tenha utilizado o recurso GeoGebra e outro que tenha resolvido analiticamente, que respondam oralmente. Ambos terão de justificar oralmente qual será o tarifário mais vantajoso, e quais em que dados basearam a sua resposta. A professora, com recurso ao GeoGebra, pode colocar uma grelha e mostrar a ordenada da abcissa 1 nas duas funções, com o intuito de esclarecer eventuais dúvidas que ainda persistam. Caso muitos alunos tenham interpretado os dados da empresa P como uma situação de proporcionalidade direta, a professora deve fazer uma explicação mais alargada para a turma, sublinhando o custo fixo do aluguer obrigatório do capacete.
- **Discussão Q1.2:** A professora deve, novamente, solicitar a dois alunos (representativos de dois pares) que respondam oralmente. Se possível, um dos alunos deve ter respondido afirmativamente e o outro discordado da afirmação. A professora deve envolver toda a turma nesta discussão, questionando: *"Concordas com qual dos teus colegas? E Porquê? Qual a vossa opinião?"*. Neste momento a professora deve ter a representação gráfica das duas funções, mas não deve dar grande enfase ao ponto de interseção de ambas, para não se diminuir o interesse na discussão da questão seguinte.
- **Discussão Q1.3**: Devido ao carácter mais aberto desta questão, a professora deverá pedir a dois ou três alunos que deem a sua opinião, mas que a justifiquem. A professora não deve induzir nenhuma das respostas e apenas monitorizar toda a discussão, devendo apenas alertar quando algum dos alunos apresentar uma justificação incorreta. A professora deverá projetar no GeoGebra a representação gráfica das duas funções, mostrando o ponto de interseção, com o objetivo de clarificar os alunos que só é vantajoso a partir do ponto (1,5;10), isto é, alugar a bicicleta na empresa M só será mais vantajoso até uma hora e meia de utilização e, portanto, a escolha da empresa deve ser feita dependendo do tempo que os amigos pretendem utilizar as bicicletas. A professora poderá recorrer à discussão desta alínea para clarificar a resposta às alíneas anteriores, se sentir que ainda existem

4.º - Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa | 15 minutos

dúvidas.

A professora deverá perguntar aos alunos se existiram dúvidas na resolução do trabalho de casa, e deverá resolver as questões que levantaram dúvidas no quadro, ou oralmente, em grande grupo, com o objetivo de clarificar os alunos. A professora deverá recordar os alunos, que não realizaram o trabalho de casa, que devem fazê-lo porque será um importante elemento de consolidação dos conteúdos trabalhados.

Nesta discussão os alunos a professora deve tentar assegurar-se que os alunos não têm dúvidas no cálculo analítico do declive. Em particular, deve dar especial enfoque à questão 8 da página 174 do manual escolar, devendo clarificar todas as dúvidas que tenham surgido na realização desta questão. A professora deve projetar os quatro referenciais no quadro identificando cada uma das retas com a sua equação reduzida, em interação com os alunos. A professora deverá questionar os alunos: "*Que semelhanças identificam nas retas r e s? E nas retas t e u?",* este questionamento com o objetivo de que os alunos se centrem no declive das retas. Nesta interação, a professora deve enfatizar as diferentes posições das retas quando o declive é negativo ou positivo. De modo a complementar esta discussão, a professora poderá traçar outras retas num referencial questionando os alunos se terão declive positivo ou negativo.

Neste momento, a colega de estágio irá registar os alunos que realizaram a tarefa proposta para casa.

5.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução de questões do manual escolar | 23 minutos

Ao iniciar este segmento, os alunos serão informados do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho, a pares. A professora deve informar os alunos que irão resolver questões do manual para trabalharem o cálculo analítico do declive, e dará a indicação que devem realizar essas questões nas folhas quadriculadas, distribuídas no início da aula. A professora deverá referir aos alunos que dispõem de 23 minutos para resolver a questão 12 da página 177, as questões 6.a), 6.d), 6.e) da página 176, a questão 4 da página 178 e a questão 8 da página 179 do manual escolar, informando que após este segmento se iniciará um momento de discussão, e irá reforçar que os alunos não devem apagar os seus registos das fichas de trabalho e, caso se enganem, devem fazer um traço por cima.

Os alunos deverão ser informados que na questão 6 devem ainda fazer uma representação gráfica das funções e que nas questões de escola múltipla, 4 e 8, devem justificar o seu raciocínio. Considerando os diferentes ritmos de trabalho de cada aluno serão adicionalmente propostas as questões: 17 da página 177 e 7 da página 179 do manual escolar.

A professora, à semelhança do segmento de trabalho autónomo anterior, circulará pela sala com o objetivo de apoiar e monitorizar o trabalho dos alunos e deverá atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados, pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
12	**Estratégias 12:** - A reta t é paralela ao eixo das abcissas e passa no ponto (0,4) logo a sua equação é $y = 4$ - A reta r é linear, portanto é da forma $y = ax$. Para calcular o valor do declive os alunos calcularão a razão entre a ordenada e a abcissa de um ponto que pertença à reta. Por exemplo, utilizando o ponto (6,3) obtendo $a = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ logo a sua equação é $y = \frac{1}{2}x$ ou $y = 0{,}5x$. Alguns alunos poderão utilizar dois pontos e calcular o declive utilizando, por exemplo o ponto (4,2) e (6,3) obtendo $a = \frac{3-2}{6-4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. - A reta s é paralela à reta r, logo tem declive 0,5 e ordenada na origem -2. A sua equação é $y = 2x - 2$. Os alunos também poderão utilizar dois pontos e calcular o declive utilizando, por exemplo o ponto (0,-2) e (4,0) obtendo $a = \frac{0-(-2)}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. - As estratégias para a reta p são análogas à da reta r. Obtendo $y = -2x$. - As estratégias para a reta s são análogas à da reta s. Obtendo $y = -2x - 2$. **Dificuldades 12:** - Não são expetáveis dificuldades na obtenção da equação das retas r, s e t. - Ao obter a equação da reta p, apesar de sere do tipo $y = ax$, como o declive é negativo são esperadas algumas dificuldades. Os alunos poderão pensar que o valor obtido, por ser negativo, poderá estar incorreto.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 12:** -Como é que estás a pensar? - Começaste por escrever a equação de que reta? - Qual a relação entre as retas r e s? - Qual a relação entre as retas p e q? - De que tipo é a reta t? - Através da representação gráfica, que informação temos do declive das retas p e q?

	- Na obtenção da equação da reta são esperadas dificuldades análogas às anteriores.	
6	**Estratégias 6.a):** - Reconhecer a forma canónica de uma função f como $f(x) = ax + b$ e escrever que, $f(x) = -3x + 3$. Identificar f como uma função afim, reconhecer que o seu gráfico é uma reta e que, para traçar uma reta, são necessários dois pontos. Identificar dois pontos pertencentes à reta e calcular, por exemplo, $f(0) = 2$ e $f(1) = -1$, resultando os pontos (0,2) e (1,-1). Marcar os pontos no referencial e traçar a reta. **Dificuldades 6.a):** - Em escrever a forma canónica. - Em reconhecer que precisam conhecer dois pontos para traçar a reta. - Em calcular dois pontos do gráfico de f, dada a sua expressão algébrica. - Caso identifique mal os pontos e trace uma reta que passe na origem do referencial. **Estratégias 6.d):** - Reconhecer a forma canónica de uma função i como i$(x) = ax + b$ e escrever que, $i(x) = -x$. Identificar i como uma função linear, reconhecer que o seu gráfico é uma reta que passa na origem do referencial e que, para traçar uma reta, são necessários dois pontos. Identificar dois pontos pertencentes à reta e calcular, por exemplo, $f(0) = 0$ e $f(1) = -1$, resultando os pontos (0,0) e (1,-1). Marcar os pontos no referencial e traçar a reta. **Dificuldades 6.d):** -Análogas a 6.a) - Reconhecer que é uma função linear e que passa na origem do referencial. **Estratégias 6.e):** - Reconhecer a forma canónica de uma função k como k$(x) = ax + b$ e escrever que, $k(x) = -2$. Identificar k como uma função constante, reconhecer que o seu gráfico é uma reta horizontal e que, para marcar o gráfico basta traçar uma reta paralela ao eixo das abcissas que passa no ponto (0,-2). **Dificuldades 6.e):** -Ao escrever a função na forma canónica. - Ao não identificar que é uma função constante e que a sua reta é paralela ao eixo das abcissas.	**Apoio a prestar 6.a):** - Como estás a pensar? -Qual é a forma canónica de uma função? - É uma função de que tipo? Como será o seu gráfico? - Quantos pontos precisamos conhecer para traçar uma reta? - O gráfica desta função passa na origem do referencial? -Como poderemos identificar um ponto da reta? -Qual é a imagem de 0? Qual é a imagem de 2? **Apoio a prestar 6.d):** Análogo a 6.a) **Apoio a prestar 6.e):** -Análogo a 6.a) -Apoiar o aluno na escrita da função na forma canónica. -Se o ponto tiver abcissa 1, qual a sua ordenada? E se tiver abcissa 5? E -4?
4	**Estratégias 4:** - Reconhecer que como a reta tem declive negativo as opções (A) e (D) são excluídas, e eliminar a opção (C) por intersetar o eixo dos yy num ponto de ordenada negativa. Finalmente, optar pela hipótese (B) por ser a representação de uma reta com declive negativo e que tem ordenada na origem positiva. -Determinar dois pontos da reta e traça-la, optando pela hipótese (B). **Dificuldades 4:** Ao identificar uma reta com declive negativo: - como uma reta com pontos de coordenadas negativas. -como uma reta que interseta o semieixo negativo dos xx ou dos yy.	**Apoio a prestar 4:** -Qual é o declive desta reta? É positivo ou negativo? -Qual é a ordenada na origem? -Se o declive é negativo a reta será de que tipo?
	Estratégias 8.1: - Reconhecer o gráfico de uma função de proporcionalidade direta como uma reta que passa na origem do referencial, optando pela hipótese (A).	**Apoio a prestar 8.1:** - Como estás a pensar? - Podes dar-me uma exemplo de uma função de proporcionalidade direta?

8	**Dificuldades 8.1:** Ao identificar o gráfico de uma função de proporcionalidade direta: - Como uma reta que passa na origem do referencial. - Como uma reta que não pode ter declive negativo. Ao optar por escolher uma hipótese que inclua retas paralelas. **Estratégias 8.2:** -Identificar que o valor da ordenada na origem é zero, ou seja , que é uma reta do tipo y=ax, e reconhecer que o declive pode ser dado pela razão entre a ordenada e abcissa dos seus pontos, calculando, por exemplo, a partir do ponto (1,2) que o declive é $\frac{2}{1} = 2$. Por exclusão de partes, optar pela hipótese (B). - Identificar um ponto da reta através da sua representação gráfica e substituir em cada uma das expressões, selecionando a hipótese (B). - Através das expressões algébricas, determinar um ponto e confirmar, através da representação gráfica se o ponto pertence à reta. Optar pela hipótese (B). **Dificuldades 8.2:** -Ao identificar de forma incorreta o gráfico da função g. -Ao reconhecer que é uma função afim. -Em calcular o declive da reta. **Estratégias 8.3:** - Recorrer ao raciocínio feito na alínea anterior, ou a um raciocínio análogo, e reconhecer que a reta que é o gráfico de h tem o mesmo que a reta que é o gráfico da função g, 2, identificando que a ordenada na origem é 6. Selecionar a hipótese (D). **Dificuldades 8.3:** - Caso responda incorretamente à alínea anterior e, ao reconhecer que os gráficos de g e h são retas paralelas, opte por uma expressão com o mesmo declive. - Ao calcular o declive. -Ao identificar a ordenada na origem. - Caso não identifique que com é uma função afim a ordenada na origem é diferente de zero. **Estratégias 8.4:** - Recorrer ao raciocínio feito na alínea 8.2, ou a um raciocínio análogo, e reconhecer que a reta que é o gráfico de f tem o mesmo declive que o gráfico da função g e de h, 2, identificando que a ordenada na origem é 6 negativa e superior a 7. Selecionar a hipótese (C). **Dificuldades 8.4:** -Análogas a 8.3 -Ao reconhecer que o valor da ordenada na origem é negativo e que o declive é positivo, excluindo-se (D). -Ao identificar a ordenada na origem como a ordenada do ponto em que a reta interseta o eixo dos xx.	- Uma função de proporcionalidade direta é uma função linear ou afim? - O gráfico de uma função de proporcionalidade direta passa na origem do referencial? **Apoio a prestar 8.2:** -Como estás a pensar? - A função g é uma função de que tipo? -Qual a sua ordenada na origem? -Poderemos calcular o declive da reta? -Consegues identificar algum(ns) ponto(s) da reta? **Apoio a prestar 8.3:** -Como estás a pensar? - A função g é uma função de que tipo? -Qual a sua ordenada na origem? -Poderemos calcular o declive da reta? -Consegues identificar algum(ns) ponto(s) da reta? - Como estão relacionados os gráficos de g e h? Que influencia tem na sua expressão algébrica? **Apoio a prestar 8.4:** -Análogo a 8.3 -Em que ponto a reta interseta o eixo xx?

6.º - Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados | 12 minutos

Após dar por concluído o momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Trabalhar o cálculo analítico do declive e a noção de paralelismo para retas com o mesmo declive.
- Trabalhar a interpretação geométrica de declive positivo, declive negativo e nulo;

- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, consolidando conhecimentos;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário e deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q.12:** Na discussão desta questão a figura será projetada e a professora solicitará a dois ou três alunos que participem oralmente, explicando a sua resposta. A professora deve questionar se emergiram outras estratégias com o objetivo de destacar que *p* e *q* são retas paralelas pelo que têm o mesmo declive - analogamente para as retas *r* e *s*. Assim, a professora deverá frisar que poderiam ter calculado o declive para a reta *p* recorrendo à razão entre a abcissa e a ordenada de um dos seus pontos, e para a reta *q,* utilizando a expressão do cálculo do declive (recorrendo a dois pontos da reta). No entanto, a professora deve enfatizar que, como *p* e *q* são paralelas, bastaria calcular o declive para uma das retas e atender à ordenada na origem de cada uma - analogamente para *s* e *r*. Nesta discussão, a professora deverá também fazer alusão às diferenças na representação entre uma reta com declive positivo ou negativo. No caso da reta *t,* deverá ficar explicito para os alunos que é uma reta horizontal, paralela ao eixo das abcissas e que tem uma equação do tipo $y = b$. Assim, em interação com os alunos, a professora deverá observar que o declive de uma reta deste tipo é zero (podendo exemplificar, considerando dois pontos desta reta).
- **Discussão Q6.a):** A professora solicitará a uma aluno que vá ao quadro explicar a sua resposta. O aluno deverá traçar a reta no referencial, com o auxílio da professora. Aqui, a professora deverá tentar garantir que os alunos ficam esclarecidos quanto à forma canónica da expressão algébrica de uma função. Na discussão desta questão a professora deverá questionar aos alunos de que tipo é aquela função, evidenciando que o seu gráfico é uma reta que não passa na origem do referencial e que, para a traçarmos, será crucial conhecermos dois dos seus pontos e que, para tal, devemos determinar a ordenada de dois pontos com abcissa distintas.
- **Discussão Q6.d) e Q6.e):** Outro aluno (em representação do par) é chamado pela professora a participar oralmente e a expor o seu raciocínio, enquanto a professora regista no quadro. Nesta interação com os alunos, a professora deverá questionar os alunos que tipo de função é a i e a k, frisando que, só conseguimos dar resposta a esta questão depois de escrevermos a função na forma canónica. Em interação com os alunos a professora traçará as retas $y = -x$ e $y = -2$ num referencial, dando destaque a que, no caso da reta horizontal, basta traçar uma reta paralela ao eixo dos xx e que passe no ponto (0,-2). A professora deve ainda questionar a turma: *Qual é o declive da reta do gráfico da função k?*
- **Discussão Q.4:** A resposta a esta questão deverá ser dada oralmente por um aluno, que por sua vez deverá explicar como o par pensou. Nesta discussão a professora deverá enfatizar, os argumentos que excluem as hipóteses (A), (C) e (C), consoante as estratégias a que os alunos recorram. Com os quatro referenciais projetados ao longo da discussão a professora deve frisar que a reta tem declive negativo que a a sua ordenada na origem é positiva.
- **Discussão Q.8.1:** Durante a discussão da questão 8 a figura será projetada. Nesta alínea, um aluno explicará a sua resposta oralmente, ficando a cargo da professora esclarecer dúvidas que possam surgir e enfatizar que as funções de proporcionalidade são funções lineares, pelo que passam na origem do referencial.
- **Discussão Q.8.2:** A professora deve pedir a outro aluno que dê a sua resposta oralmente e que justifique a sua opção. Em interação com a turma, a professora deverá clarificar a exclusão das hipóteses (A), (C) e (D), sublinhando que a função g é linear e portanto passa na origem do referencial, e ainda que é possível calcular o seu declive a partir da razão entre a ordenada e a abcissa de um dos seus pontos.
- **Discussão Q.8.3:** No seguimento da alínea anterior, um outro aluno deve expor a resposta do par oralmente. Neste segmento, a professora deve chamar à atenção para o facto de o gráfico da função h ser paralelo ao gráfico da função g e, portanto, as retas têm o mesmo declive.

- **Discussão Q.8.4**: Outro aluno irá responder oralmente a esta questão e a professora deve reforçar a ideia de paralelismo entre as retas e a relação entre o seu declive, sublinhando o facto de a ordenada na origem da reta do gráfico de f ser negativa - por estar associada ao ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas.

7.º Encerramento da aula	**|2 minutos**

A professora deverá recolher o enunciado da Tarefa dos alunos bem como as folhas onde os alunos resolveram as questões do manual escolar e informar que estas serão entregues na aula seguinte.

Será feita uma proposta de trabalho de casa, que os alunos devem registar no caderno: questões 2 e 4 da página 80 do Caderno de Atividades e a questão 3 da página 171 do manual escolar.

Neste segmento final, com o apoio da colega de estágio a professora entregará aos alunos os documentos recolhidos da aula anterior.

Formas e momentos de avaliação:

Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback*, serão recolhidas as produções escritas dos alunos, bem como serão anotados na grelha da turma as participações e trabalhos de casa.

Anexo 3.8 – Planificação da 8.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 8.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 127 20 de abril de 2016

Sumário: Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa.
A reta vertical. Resolução de exercícios do manual escolar.

Duração da aula: 45 minutos

Objetivos:
- Consolidar a noção de declive de uma reta.
- Identificar que todos os pontos de uma reta vertical têm a mesma abcissa.
- Reconhecer a equação de uma reta vertical como $x = c$ e que essa reta passa no ponto de coordenadas $(c, 0)$.
- Reconhecer que o declive da reta horizontal é nulo.

Conhecimentos prévios dos alunos:
- Os conceitos de função, ordenada na origem e declive
- Identificar e representar uma função linear, afim ou constante
- Cálculo analítico do declive

Recursos para o professor:	**Recursos para o aluno:**
▪ Manual escolar ▪ Computador e projetor ▪ Quadro e marcador	▪ Material de desenho e escrita ▪ Manual escolar ▪ Folhas quadriculadas

Metodologia de trabalho:
- Introdução do trabalho a realizar, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução das questões do manual escolar, trabalho autónomo dos alunos, individual ou a pares (de acordo com a disposição na sala de aula).

Momentos da aula:

	Momentos da aula	**Tempo previsto** (em 45 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	4 min
2.º	Equação de uma reta vertical	12 min
3.º	Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa	15 min
4.º	Trabalho autónomo na resolução de questões do manual escolar	7 min
5.º	Discussão em grande grupo de questões do manual escolar	5 min
6.º	Encerramento da aula	2 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças | 4 minutos

Antes do início da aula a professora deverá acautelar o funcionamento do seu computador e do projetor. Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos e ditará o sumário, enquanto contará com a colaboração da colega de estágio para o registo dos alunos que realizaram o trabalho de casa e para a distribuição de folhas quadriculadas (onde os alunos farão os seus registos escritos nesta aula)

2.º - Equação de uma reta vertical	**| 12 minutos**

A professora deve marcar num referencial dois pontos com a mesma abcissa, por exemplo (3,2) e (3,5), questionando os alunos: *"Posso traçar alguma reta que passe por estes pontos? Quantas retas que contenham estes dois pontos consigo traçar?"*. Aqui, a professora irá projetar um ficheiro GeoGebra com esta reta, perguntando aos alunos exemplos de outros pontos que estejam nesta reta, questionando: "*Como são as coordenadas de um ponto qualquer que esteja nesta reta?"*, com o objetivo de que os alunos observem que, qualquer ponto daquela reta terá abcissa 3, questionando ainda *"Em que ponto esta reta cruza o eixo das abcissas?".* Assim, em interação com os alunos, a professora deve evidenciar que esta é uma reta vertical que passa pelo ponto de coordenadas (3,0) e que como a abcissa de todos os pontos que estão naquela reta é 3, a equação da reta é $x = 3$, porque não depende do valor de y.

Ainda neste momento, a professora deve frisar que nos pontos que pertencem à reta x=3 apenas varia a sua ordenada. Então, a professora deve fazer referência ao facto de não se considerar declive na reta vertical uma vez que têm a mesma abcissa e, para calcular o declive de uma reta, precisaríamos conhecer dois pontos dessa reta com abcissa distinta.

Ao recorrer ao ficheiro GeoGebra, utilizando o seletor, a professora deve mostrar outros exemplos de retas verticais, nomeadamente, retas verticais que passem por pontos de abcissa negativa, frisando que qualquer dois pontos da reta tem a mesma abcissa. Em particular, a professora deve traçar a reta $x = 0$, pedindo aos alunos que indiquem 3 ou 4 pontos da reta, com o objetivo que observem que têm todos abcissa 0 e, portanto, a reta tem equação $x = 0$, sendo coincidente com o eixo das ordenadas.

Para que fique como registo dos alunos no caderno a professora deve ditar uma breve síntese referente à reta vertical. Assim, a professora deverá referir que uma reta vertical é constituída por pontos com uma mesma abcissa, c, e que passa pelo ponto de coordenadas $(c, 0)$, fazendo referência a que uma equação desta reta é $x = c$.

Em jeito de conclusão, a professora deverá questionar "*Recordam-se o que é uma função?",* para recordar que para cada objeto existe uma única imagem, e neste caso, ao retomar o exemplo da equação $x = 3$, referir que para o objeto 3 existem inúmeras imagens, então, a reta $x = 3$ não representa uma função, tal como qualquer reta vertical.

3.º - Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa	**| 15 minutos**

A professora deverá questionar se existiram dúvidas na resolução do trabalho de casa [finalizar as questões 12, página 177, questão 4, página 178, e fazer a questão 8 da página 179] e deverá resolver as questões que levantaram dúvidas no quadro, ou oralmente, em grande grupo, com o objetivo de clarificar os alunos. A professora deverá recordar os alunos, que não realizaram o trabalho de casa, que devem fazê-lo porque será um importante elemento de consolidação dos conteúdos trabalhados.

Nesta discussão a professora deve tentar assegurar-se que os alunos não têm dúvidas no cálculo analítico do declive, que identificam retas paralelas como retas que têm o mesmo declive, e que identificam a ordenada da origem de uma reta como o valor da ordenada do ponto em que a reta interseta o eixo dos yy. Neste segmento em grande grupo a professora deve interagir com os alunos com o objetivo que trabalhem a interpretação geométrica de declive positivo, declive negativo e nulo.

Mais especificamente, na discussão da questão 12, no caso da reta *t,* a professora deverá frisar que é uma reta horizontal, paralela ao eixo das abcissas e que tem uma equação do tipo $y = b$. Assim, em interação com os alunos, a professora deverá observar que o declive de uma reta deste tipo é zero (podendo exemplificar, considerando dois pontos desta reta). Ainda nesta discussão, a professora deve traçar (no referencial da questão 12 que estará projetado) a reta de equação x=5, questionando os alunos: *"Qual é a equação desta reta?"*.

Para finalizar este segmento, a professora deve questionar: "*Qual é a equação reduzida de uma reta?",* com o objetivo de que os alunos se recordem da expressão $y = ax + b$. Com o objetivo de recordar a representação gráfica de uma função constante, linear ou afim, a professora deve pedir aos alunos exemplos de funções deste tipo, ao pedir por exemplo "*Indiquem a equação de uma reta que possa ser gráfico de uma função afim, e que tenha declive negativo."*.

Neste momento, a colega de estágio irá registar os alunos que realizaram a tarefa proposta para casa.

4.º - Trabalho autónomo na resolução das questões do manual escolar | 7 minutos

A professora deve informar os alunos que irão trabalhar a pares e que deverão resolver as questões 10 da página 179, 7 da página 179 e 5 da página 178 do manual escolar, durante 7 minutos. Ficará também a cargo da professora recordar que deverão resolver as questões nas folhas quadriculadas que lhes foram entregues, escrevendo o seu nome e número, e que não podem apagar qualquer registo - lembrando que no final da aula as folhas serão recolhidas. Os alunos serão informados que devem sempre justificar as suas respostas.

A professora circulará pela sala com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades (privilegiando o questionamento), e de monitorizar o seu trabalho, acautelando possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, evitando validar as suas respostas, e caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. A professora deve ainda atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
10	**Estratégias 10, p. 179:** Observar que se a reta AB é vertical, todos os pontos desta reta têm igual abcissa e, como o ponto B tem abcissa 9, essa será também a abcissa do ponto A. Pelo que, a=9, logo, optar pela hipótese (A). **Dificuldades 10:** -Interpretar o enunciado. -Ao associar o valor da abcissa ao -4, por ser a ordenada do ponto A. -Ao não reconhecer que os pontos A e B têm de ter igual abcissa.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 10:** - A reta *AB* é de que tipo? -Como são os pontos de uma reta vertical? Podes dar um exemplo? - Qual é a abcissa do ponto A? E do ponto B?
7	**Estratégias 7, p. 179:** -Observar que as hipóteses (A), (B), e (D) são verdadeiras e que (C) é falsa porque uma função de proporcionalidade direta é uma reta que passa na origem do referencial e que o seu declive resulta da razão entre a ordenada e a abcissa de um dos seus pontos. **Dificuldades 7:** -Ao não reconhecer que retas com o mesmo declive são paralelas. -Ao associar a ordenada na origem ao declive, na hipótese (B). -Ao identificar o declive da função de proporcionalidade direta como zero, uma vez que a sua representação gráfica passa na origem do referencial. - Ao indicar que o declive de uma função constante é a própria	**Apoio a prestar 7:** - Podes dar o exemplo de duas retas paralelas? - Na expressão algébrica de uma função, que valor representa a ordenada na origem? - Como se calcula declive de uma função de proporcionalidade direta? - Podes dar o exemplo de uma função constante? Como calcularias o declive dessa reta?

	constante, na hipótese (D).	
5	**Estratégias 5, p. 178:** Reconhecer que o valor da ordenada na origem é 5, pelo que o ponto em que o gráfico de f interseta o eixo das ordenadas é o (0,5). Finalmente, selecionar a hipótese (B). **Dificuldades 5:** -Em identificar a ordenada na origem como a ordenada do ponto em que a reta cruza o eixo dos yy. -Ao associar o valor 5 à abcissa.	**Apoio a prestar 5:** -Como estás a pensar? -A função f é de que tipo? - Passa na origem do referencial? -Em que valor a reta cruza o eixo das ordenadas?

5.º - Discussão em grande grupo e resolução no quadro das questões do manual escolar| 8 minutos

Após dar por concluído o momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Identificar que todos os pontos de uma reta vertical têm a mesma abcissa.
- Reconhecer a equação de uma reta vertical como $x = c$ e que essa reta passa no ponto de coordenadas $(c, 0)$.
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita Matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q10:** A professora irá solicitar a um aluno que apresente oralmente a resposta do par e deve garantir que toda a turma observa que se a reta AB é vertical, todos os pontos desta reta têm igual abcissa, pelo que, deve destacar que, como o ponto B tem abcissa 9, essa será também a abcissa do ponto A. Caso os alunos revelem muitas dificuldades nesta questão a professora deverá apresentar outros exemplos de retas verticais enfatizando o facto de todos os seus pontos terem igual abcissa.

- **Discussão Q7:** Quatro alunos distintos explicarão oralmente para a turma a sua resposta. A professora deve garantir que os alunos clarificam as suas dúvidas e que todos compreendem a argumentação dos colegas. Caso seja necessário a professora deve fazer uma explicação alargada sobre alguma das alíneas. Em especial, a professora deve destacar que retas com o mesmo declive são paralelas, podendo pedir aos alunos exemplos de retas paralelas.
- **Discussão Q5:** Um aluno irá apresentar oralmente a resposta do par, justificando-a. Em grande grupo, a professora deverá frisar que na equação reduzida de uma reta, a ordenada na origem é a ordenada do ponto em que a reta cruza com o eixo dos yy.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na folha quadriculada, fazendo a correção das questões no caderno diário.

6.º Encerramento da aula | 2 minutos

A professora deverá recolher as folhas quadriculadas e informar que estas serão entregues na aula seguinte. Caso os alunos não concluam em sala de aula todas as questões do manual escolar propostas, estas serão sugeridas como trabalho de casa para a aula seguinte.

Neste segmento final, com o apoio da colega de estágio a professora entregará aos alunos os documentos recolhidos da aula anterior.

Formas e momentos de avaliação:

Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback*, serão recolhidas as produções escritas dos alunos, bem como serão anotados na grelha da turma as participações e trabalhos de casa.

Anexo 3.93 – Planificação da 9.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 9.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 128 e 129 — 21 de abril de 2016

Sumário: Resolução de problemas e exercícios: gráficos de funções afins.

Duração da aula: 90 minutos

Objetivos:
- Consolidar a representação algébrica e gráfica uma função afim (em sentido lato)
- Interpretar a função afim atendendo a diferentes contextos: resolução de problemas
- Consolidar a noção de declive

Conhecimentos prévios dos alunos:
- Os conceitos de função, ordenada na origem e declive
- Identificar e representar uma função linear, afim ou constante
- Cálculo analítico do declive
- O paralelismo entre retas
- A reta vertical e a reta horizontal

Recursos para o professor:	**Recursos para o aluno:**
▪ Ficha de trabalho n.º 4 ▪ Computador e projetor ▪ Manual escolar ▪ Quadro e marcador	▪ Ficha de trabalho n.º 4 ▪ Material de desenho e escrita ▪ Folhas quadriculadas ▪ Manual escolar

Metodologia de trabalho:
- Introdução da ficha de trabalho, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução da ficha e das questões do manual, trabalho autónomo dos alunos a pares.

Momentos da aula:

	Momentos da aula	**Tempo previsto** (em 90 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	5 min
2.º	Apresentação da Ficha de Trabalho n.º 4	2 min
3.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1	10 min
4.º	Discussão em grande grupo e resolução da questão 1	10 min
5.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 2	10 min
6.º	Discussão em grande grupo e resolução da questão 2	10 min
7.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução das questões 3 e 4	10 min
8.º	Discussão em grande grupo e resolução das questões 3 e 4	10 min
9.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 17 da página 177	10 min
10.º	Discussão em grande grupo e resolução da questão 17	10 min
11.º	Encerramento da aula	3 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças	5 minutos

Antes do início da aula a professora deverá acautelar o funcionamento do seu computador e do projetor. Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos e ditará o sumário, enquanto contará com a colaboração da colega de estágio para o registo dos alunos que realizaram o trabalho de casa, para a distribuição das fichas recolhidas na aula anterior e da Ficha de Trabalho n.º 4.

2.º - Apresentação da Ficha de Trabalho n.º 4	2 minutos

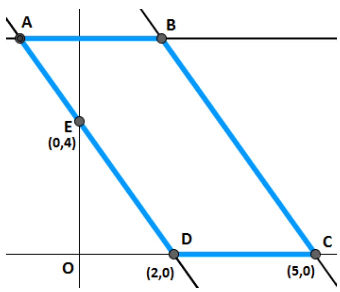
Todos os alunos serão informados pela professora do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho. A professora deve informar os alunos que irão realizar a primeira questão da ficha de trabalho a pares, durante 10 minutos, que será seguida da discussão em grande grupo.

A professora solicitará a um aluno que leia para a turma a primeira questão da ficha de trabalho, que estará projetada no quadro, questionando se existem dúvidas no que leram, solicitando, nesse caso, a outro aluno que explique a situação proposta para o colega.

3.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1	10 minutos

A professora circulará pela sala com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades (privilegiando o questionamento), e de monitorizar o seu trabalho, acautelando possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, evitando validar as suas respostas, e caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. A professora deve ainda atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro.

Os aspetos mencionados estendem-se para os restantes segmentos de trabalho autónomo.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	Tendo em conta o caráter destas questões as estratégias dos alunos poderão ser mais diversificadas do que as aqui apresentadas. **Estratégias 1:** Para um paralelogramo como o seguinte poderão surgir as seguintes estratégias:  -Reconhecer que um paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos iguais e paralelos. Identificar que o lado do paralelogramo [AD] tem a reta AD como suporte, que [BC] tem a reta BC como suporte, que [AB] tem a reta AB como suporte e que [DC] tem a reta DC como suporte. Reconhecer que as retas AB e DC são horizontais e do tipo $y = b$, e que, as retas AD e BD são do tipo $y = ax + b$ (com a e b diferentes de zero).	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 1:** - Como é que estás a pensar? - Que informação consegues retirar do gráfico? - O que pretendes saber? - Recordas-te das características de um paralelogramo? - Sugerir que observe os lados opostos como o objetivo de reconhecer que são iguais e paralelos.

	- Referir que o lado [DC] do paralelogramo está sobre o eixo das abcissas e que o seu comprimento mede 3 unidades, pelo que o seu lado oposto [AB] tem de ser igual e paralelo, independentemente da altura do paralelogramo. - Reconhecer que o ponto E tem coordenadas (0,4) e que a reta suporte de [AD] tem ordenada na origem 4. Calcular o declive desta reta, recorrendo às coordenadas dos pontos E e D, pela expressão $a=\frac{4-0}{0-2}=-\frac{4}{2}$, obtendo neste caso $a=-2$. Assim, uma equação da reta AD é $y=-2x+4$. Reconhecer que a reta BC é paralela à reta AD e que intersetará o eixo dos yy num ponto P de coordenadas $(0, y_P)$ e, portanto, uma equação pode ser $y=-2x+y_P$. Como a reta BC passa no ponto de coordenadas (5,0), obter que $y_P=2\times 5=10$. Por fim, escrever uma equação da reta BC como $y=-2x+10$. Indicar que a reta suporte do lado [DC] tem equação y=0 e concluir que, como as retas são paralelas, a reta suporte do lado oposto à base [ED] será do tipo $y=\ b$ em que (0,b) é o ponto em que a reta cruza o eixo das ordenadas. Em particular, os alunos poderão atribuir diversos valores a b, nomeadamente, escrever que $y=6$. - Dar um valor concreto à ordenada dos pontos da equação da reta suporte de [AB], por exemplo, $y=7$ (e desenvolver estratégias a partir desta opção). - Alguns alunos poderão tentar determinar as coordenadas dos vértices A e B, apesar de esta não uma estratégia muito evidente uma vez que os alunos ainda não trabalharam muito a interseção de duas retas, por processos analíticos. Ainda assim, os alunos poderão, por exemplo, indicar que uma equação da reta AB é y=b e identificar que a interseção com a reta AD é o ponto $(\frac{b-4}{-2}, b)$, por exemplo, no caso de y=6 ser uma equação da reta AB, o ponto A seria (-1,6). Analogamente, o ponto de interseção da reta CB com a reta AB é $(\frac{b-10}{-2}, b)$, ou seja, se b=6, B terá coordenadas (2,6). Para determinar as coordenadas de B a estratégia poderá passar por reconhecer que a medida do comprimento dos segmentos [DC] e [AB] é a mesma e igual a 3 unidades, pelo que, os pontos A e B têm a mesma ordenada e o ponto B terá como abcissa mais três unidades que a abcissa do ponto A. **Dificuldades 1:** - Em identificar as propriedades de um paralelogramo; -Em identificar que retas paralelas têm o mesmo declive; -Ao escrever a equação das retas horizontais. -Em determinar a ordenada na origem da reta BC. - Em iniciar a resolução por considerar que não dispõe de informação suficiente. -Na interpretação do enunciado. -Ao tentar dividir o paralelogramo em outras figuras.	- Quais são os vértices do paralelogramo? - Pensa na reta suporte desse lado. Consegues escrever a sua equação? - Que informação tens das coordenadas do ponto E? - Sugerir que reparem que cada lado do paralelogramo está sobre uma reta. - Que característica comum têm os pontos (2,0) e (0,5)? Como serão as coordenadas de todos os pontos dessa reta? - Após conheceres o declive, que informação precisas para escrever a equação da reta.

4.º - Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 1 | 10 minutos

Após dar por concluído o primeiro momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Interpretar funções afins em contextos diversos
- Articular temas matemáticos: álgebra e geometria;
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

A professora deve também cuidar que as estratégias dos alunos não são exploradas de forma pormenorizada para não influenciar as estratégias na futura resolução de problemas.

- **Discussão Q1:** Enquanto a figura está projetada, a professora deve solicitar a um par de alunos que apresente oralmente a sua resolução, garantindo que esta explicação é representativa da maior parte das estratégias dos alunos. Depois, ao questionar "*Quem é que pensou de outro modo*?" deverá pedir a outro par para que exponha oralmente a estratégia seguida. Isto, com o objetivo de que toda a turma contacte com diferentes estratégias. A professora deve envolver toda a turma nesta discussão, questionando: *"Concordam com os colegas? E Porquê? Qual a vossa opinião?"*. Na fase inicial a professora não deve induzir nenhuma das respostas, apenas monitorizar toda a discussão, devendo apenas alertar quando algum dos alunos apresenta uma justificação incorreta. A partir das justificações dos alunos, a professora deverá enfatizar as propriedades do paralelogramo como um quadrilátero com lados opostos iguais e paralelos, bem como que dois dos lados deste paralelogramo estão sobre retas paralelas ao eixo das abcissas, frisando ainda (em interação com os alunos) como poderiam obter a ordenada na origem da reta BC. Este será também o momento oportuno para que a professora sublinhe uma aplicação do tema que os alunos estão a estudar na Geometria.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

5.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 2 | 10 minutos

A professora, à semelhança do segmento de trabalho autónomo anterior, circulará pela sala com o objetivo de apoiar e monitorizar o trabalho dos alunos e deverá atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados, pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	**Estratégias 2.1.a):** -Relacionar o declive positivo com as retas crescentes e como tal concluir que a única reta com declive positivo é a reta r - Efetuar o cálculo analítico do declive e concluir que a única reta com declive positivo é a r. **Dificuldades 2.1.a):** Como nesta questão os alunos deverão responder sem efetuar cálculos, o mesmo poderá ser um entrave na resolução da mesma. Como tal, são esperadas algumas dificuldades. - Recorrer ao cálculo analítico do declive para verificar em que retas o declive é positivo - Não relacionar a inclinação das retas com o respetivo valor do declive - Confundir o valor do declive com o valor da ordenada na origem **Estratégias 2.1.b):** Análogas às da questão 2.1.a) Concluindo que são as retas p, q e s. **Dificuldades 2.1.b):** Análogas às da questão 2.1.a) **Estratégias 2.1.c):** -Análogas à da questão 2.1.a) - Exclusão de partes - Por ser a única reta horizontal, e distinta das restantes.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 2.1.a):** -Como é que estás a pensar? - O que é pretendido nesta questão? - Como é que valor do declive está relacionado com a reta? - O que significa ter valor positivo? - O que distingue as retas apresentadas na figura? **Apoio a prestar 2.1.b):** Análogo ao da questão 2.1.a) **Apoio a prestar 2.1.c):** Análogas à da questão 2.1.

	Dificuldades 2.1.c): Análogas à da questão 2.1.a) **Estratégias 2.2:** -A hipótese (A) é uma reta que passa pela origem do referencial, como tal terá que ser a reta p - As hipóteses (B) e a (E) têm declive negativo como tal terão de ser as retas q e s. Os alunos poderão verificar que a ordenada na origem da reta s é inferior à ordenada na origem da reta q, concluindo desta forma que a hipótese (B) é a reta s e a hipótese (E) é a reta q. Ou, os alunos poderão indicar que a reta s está menos inclinada que a reta s e portanto o declive terá que ser inferior, concluindo desta forma que a hipótese (B) é a reta s e a hipótese (E) é a reta q. - A hipótese (D) é a única que tem declive positivo e, portanto, é a reta r - A hipótese (D) é a única que tem declive nulo e, portanto, é a reta t - Os alunos ainda poderão recorrer à questão 2.1. para verificarem quais das retas têm declive positivo, negativo ou nulo. **Dificuldades 2.2:** Devido ao caracter mais aberto desta questão por não ser suposto recorrerem a cálculos analíticos, os alunos poderão demonstrar algumas dificuldades. - Não relacionar o valor do declive com a inclinação das retas - Não relacionar que uma reta que passa na origem do referencial é do tipo $y = ax$ - Não relacionar que uma reta horizontal é do tipo $y = b$ - Trocar a hipótese (B) com a (E) devido ao declive ser negativo - Não apresentar justificação.	**Apoio a prestar 2.2:** -Como é que estás a pensar? - O que é pretendido nesta questão? - Será que a questão 2.1. nos ajuda a resolver esta? - Quais as diferenças entre as equações reduzidas das retas apresentadas? - Não existe nenhuma hipótese que consigas logo associar a uma reta?

6.º - Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 2 | 10 minutos

Após dar por concluído o segundo momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Relacionar o declive da reta com a sua inclinação;
- Relacionar a representação gráfica com a respetiva equação reduzida da reta;
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

Discussão Q2.1: A professora deve solicitar a três alunos (representativos de três pares) que respondam oralmente, cada um a uma alínea diferente. Deve também pedir a todos que justifiquem as suas respostas. A professora deve enfatizar a relação entre o valor do declive e a posição das retas, esclarecendo que retas com declive positivo são crescentes, retas com declive negativo são decrescentes, e que, retas com declive nulo são sempre retas paralelas ao eixo das abcissas.

Discussão Q2.2: A professora deve solicitar a cinco alunos (representativos de cinco pares) que respondam oralmente, cada um a uma equação diferente. Cada aluno deve associar a equação à respetiva reta, explicando como procedeu para fazer essa escolha. Nas equações (B) e (E) a professora deve garantir que os alunos percebem a diferença entre as duas equações, enfatizando o valor do declive, mas também o valor da ordenada na origem. Podendo questionar os alunos: *Qual a diferença na representação gráfica se uma reta tem declive* $-\frac{1}{2}$ *e outra -1? Qual o maior valor? Como conseguimos comparar as duas inclinações?* Nesta discussão é crucial que fique explicito para os alunos a relação entre o declive a inclinação das retas.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

7.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução das questões 3 e 4 | 10 minutos

A professora, à semelhança dos segmentos de trabalho autónomo anteriores, circulará pela sala com o objetivo de apoiar e monitorizar o trabalho dos alunos e deverá atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados, pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
3	**Estratégias 3:** -Reconhecer que uma reta paralela à reta AB tem o mesmo declive. Calcular o declive da reta AB tal que $a=\frac{-7-5}{8-2}=-\frac{12}{6}=-2$, e indicar que a reta será do tipo $y=-2x+b$. Reconhecer que resta determinar a ordenada na origem e, como a reta terá de passar no ponto P, indicar que se verificará a igualdade $9=-2\times(-3)+b$. Pelo que b=3. Escrever uma equação da reta paralela a AB que passa pelo ponto P como $y=-2x+3$. **Dificuldades 3:** -Na interpretação do enunciado. - Calcular o declive da reta AP ou BP. -No cálculo do declive. -Em determinar a ordenada na origem da reta paralela a AB que passa no ponto P.	**Apoio a prestar 3:** -Como é que estás a pensar? - Se as retas são paralelas, que informação temos sobre o declive? - Queres escrever a equação de que reta? -De que dados precisamos para escrever uma equação da reta? -Como poderás determinar o declive? E a ordenada na origem?
4	**Estratégias 4:** -Identificar que o eixo de reflexão que transforma a figura A na figura B é uma reta que não passa na origem do referencial, pelo que, é da forma $y=ax+b$ com a e b diferentes de zero. Atendendo à escala do referencial, identificar dois pontos, por exemplo, (4,0) e (2,2) e calcular o declive, tal que, $a=\frac{2-0}{2-4}=\frac{2}{-2}=-1$. Assim, escrever uma equação do eixo de reflexão como $y=-x+b$ e recorrer a um ponto para determinar b. Por exemplo, recorrendo ao ponto (2,2), obter que $2=-2+b$, logo b=4 e uma equação do eixo seria $y=-x+4$. -Atendendo à escala do referencial, identificar dois pontos, por exemplo, (4,0) e (2,2) e calcular o declive, tal que, $a=\frac{2-0}{2-4}=\frac{2}{-2}=-1$. Assim, escrever uma equação do eixo de reflexão como $y=-x+b$ e recorrer a um ponto para determinar b. Por exemplo, recorrendo ao ponto (2,2), obter que $2=-2+b$, logo $b=4$ e uma equação do eixo seria $y=-x+4$. - Em alternativa, identificar dois pontos, incluindo o ponto de interseção do eixo com a ordenada na origem, por exemplo (4,0) e (0,4). Do mesmo modo, obter que o declive é -1 e escrever $y=-x+4$. **Dificuldades 4:** - Em identificar o eixo de simetria. - Em identificar pontos que pertençam ao eixo de simetria. - Ao associar o eixo de simetria a uma equação de uma reta que não passa na origem do referencial. -No cálculo do declive.	**Apoio a prestar 4:** -Como é que estás a pensar? - Como transformamos a figura A na figura B? -Recordar que os vértices correspondentes têm de ficar à mesma distância do eixo de simetria. -Sugerir que trace o eixo de simetria. - De que dados precisamos para escrever uma equação da reta? - Conheces dois pontos do eixo? -Como poderás determinar o declive? E a ordenada na origem?

7.º - Discussão em grande grupo e resolução das questões 3 e 4	10 minutos

A professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Interpretar funções afins em contextos diversos
- Articular temas matemáticos: álgebra e geometria;
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q3:** A professora deve solicitar a um aluno que explique a resposta do par, oralmente, para a turma. Caso surjam dúvidas generalizadas a professora deve fazer uma breve explicação e, em interação com os alunos, deverá enfatizar que duas retas paralelas têm o mesmo declive, pelo que, ao calcular o declive da reta AB, determinamos o declive de qualquer reta que seja paralela a AB. Para além disto, a professora deverá enfatizar que uma equação da reta que pretendemos será do tipo $y = -2x + b$ (em que b é a ordenada do ponto em que a reta cruza o eixo das ordenadas) mas que, como não conhecemos esse ponto temos de recorrer aos dados disponíveis, neste caso as coordenadas do ponto P. Como P é um ponto da reta, ao substituirmos as suas coordenadas na equação iremos obter uma igualdade válida e, portanto, de $9 = -2 \times (-3) + b$ obtemos que b é 3 e uma equação da reta em causa será $y = -2x + 3$.
- **Discussão Q4:** Enquanto a figura está projetada, a professora deve solicitar a um aluno que apresente no quadro os resultados do par, explicando como pensaram. Com o objetivo de envolver a turma e clarificar eventuais dúvidas, a professora questionará se alguém pensou de outro modo, pedindo, nesse caso, ao aluno que exponha oralmente a estratégia do par. Nesta discussão deve ficar claro para os alunos que o eixo de reflexão é uma reta que, neste caso, não passa na origem do referencial, pelo que, terá uma equação do tipo $y = ax + b$ (com a e b diferentes de zero). Assim, a professora deverá frisar que todos os pontos da figura A (em particular os vértices) estão à mesma distância do eixo de reflexão que os pontos correspondentes da figura B e que, com esta informação conseguem identificar pontos que pertencem a este eixo, logo, determinar uma equação do eixo de reflexão.

9.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 17 da página 177	10 minutos

A professora, à semelhança dos segmentos de trabalho autónomo anteriores, circulará pela sala com o objetivo de apoiar e monitorizar o trabalho dos alunos e deverá atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados, pelos alunos no quadro.

Os alunos serão informados que irão trabalhar a pares e que deverão resolver as questões na folha quadriculada que foi distribuída, e que não podem apagar qualquer registo, devendo riscar, caso se enganem.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
17	**Estratégias 17.a):** - Como saem do tanque 10 litros de água por cada minuto ao fim de x minutos saem $10x$ litros de água. O tanque inicialmente tinha 500 litros de água, sendo assim ao fim de x minutos restam no tanque $y = 500 - 10x$ litros de água **Dificuldades 17.a):** Devido ao nível de dificuldade desta questão são esperadas algumas dificuldades. Nomeadamente, - Considerar que saem 10 litros de água por minuto e ao fim de x minutos saem $10x$ litros de água e portanto $y = 10x$ - Não considerar o valor do declive negativo, colocando $500 + 10x$ - Não considerar que por minutos saem 10 litros de água,	**Apoio a prestar 17.a):** -Como é que estás a pensar? - O que é pretendido nesta questão? - Quantos litros de água saem do tanque por minuto? - Quantos litros tinha o tanque inicialmente?

	concluindo que $y = 500 - x$ litros - Não responder	
	Estratégias 17.b): - Utilizar os dados iniciais, concluindo que ao fim de 5 minutos saem 50 litros de água. Como tal restam 500-50=450 litros de água - Utilizar a equação obtida na alínea anterior e substituir o x por 5. Obtendo $y = 450$. **Dificuldades 17.b):** Não são esperadas grandes dificuldades nesta questão. - Indicar apenas que saem 50 litros de água.	**Apoio a prestar 17.b):** - O que é pretendido? - Quantos litros saíram do tanque? Nesse caso, quantos litros restam no tanque?
	Estratégias 17.c): Recorrer à equação obtida na questão 17.a) e substituir o x por diversos valores. Por exemplo, (0, 500), (10, 400). **Dificuldades 17.c):** Não são esperadas muitas dificuldades nesta questão. - Não compreender o que é pedido. - Não saber que valores atribuir a x - Considerar valores de x negativos ou superiores a 50.	**Apoio a prestar 17.c):** - O que é pretendido? - O que representa o x? - Que valores de x podemos ter? - Tendo o objeto como calculamos a sua imagem?
	Estratégias 17.d): Construir um referencial e utilizar dois pontos obtidos na alínea anterior. **Dificuldades 17.d):** - Trocar o valor de x com o valor de y. - Não utilizar uma escala correta. - Considerar valores negativos ou superiores a 50.	**Apoio a prestar 17.d):** -Como é que estás a pensar? - Como construímos um gráfico? - Para traçar um segmento de reta quantos ponto precisamos de saber? - Que dados podemos retirar do que calculamos na alínea anterior?
	Estratégias 17.e): - Por observação da representação gráfica concluir que são necessários 50 minutos. - Utilizar a equação obtida na questão 17.a) e igualar a mesma a 0, concluindo que são necessários 50 minutos. **Dificuldades 17.e):** - Não compreender o que é pedido. - Construir incorretamente o gráfico na alínea anterior e fazer uma leitura incorreta do mesmo	**Apoio a prestar 17.d):** -Como é que estás a pensar? - Se o tanque está vazio, quantos litros de água tem? O que isso significa graficamente? E analiticamente? - O que representa o x?

10.º - Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 17 | 10 minutos

Após dar por concluído o momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Interpretar a função afim em diferentes contextos;
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q17.a):** A professora deve solicitar a um aluno que dê a sua resposta no quadro, explicando a obtenção da expressão. A professora deve questionar se toda a turma obteve a mesma expressão, clarificando eventuais dúvidas que persistam. Se as dúvidas forem generalizadas, a professora deve dar vários dados concretos, como por exemplo, quando a torneira está um minuto aberta, dois minutos, 10 minutos para os alunos perceberam a variação, e que esses valores terão sempre de ser multiplicados por 10.

- **Discussão Q17.b):** A professora deve solicitar a um aluno (representativo do par) que responda oralmente, justificando a sua resposta, preferencialmente um aluno que tenha a sua resposta correta. A professora deve questionar se todos os alunos chegaram à mesma resposta.

  Discussão Q17.c): A professora deve solicitar a vários alunos que indiquem alguns valores, pedindo que indiquem primeiro o valor de x que escolheram e que cálculos efetuaram para descobrir o valor de y. Ao solicitar a vários alunos a resposta, o objetivo é envolver toda a turma na discussão desta questão.

  Discussão Q17.d): A professora deve retroprojetar um referencial e solicitar a um aluno (representativo do par) que se dirija ao quadro e represente no referencial a representação gráfica, justificando a sua escolha de pontos. A professora deve garantir que a turma fica esclarecida com a marcação dos pontos e a razão pela qual se marca um segmento de reta (contido no primeiro quadrante do referencial), enfatizando a contextualização.

  Discussão Q17.e): A professora deve solicitar a dois alunos (representativos de dois pares) que respondam oralmente, justificando a sua resposta, preferencialmente um aluno que tenha a sua resposta correta e outro com a resposta incorreta. com o intuito de promover a discussão e envolver toda a turma. A professora deve garantir que todos os alunos percebem graficamente o que significa o tanque estar vazio, assim como analiticamente.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

10.º Encerramento da aula	| 3 minutos

A professora deverá recolher a Ficha de Trabalho n.º 4 e as folhas quadriculadas e informar que estas serão devolvidas no dia seguinte, no final de uma das aulas dos alunos.

Será feita uma proposta preparação para o teste, que os alunos devem registar no caderno:

- do manual escolar: página 176, questões 9, 10 e 11; página 177, questão 15; página 179, questão 6; página 181, questões 4 e 5;

-do Caderno de Atividades: Ficha 21, questões 2 e 3; Ficha 22; Ficha 23, questões 3 e 4.

Os alunos serão informados que a aula seguinte será de esclarecimento de dúvidas para o teste.

Formas e momentos de avaliação:

Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback*, serão recolhidas as produções escritas dos alunos, bem como serão anotados na grelha da turma as participações e trabalhos de casa.

Anexo 3.10 – Planificação da 10.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 10.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 130 27 de abril de 2016

Sumário: Conclusão da discussão da ficha nº 4.
Esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação.

Duração da aula: 45 minutos

Objetivos:

- Consolidar os conteúdos da temática "Gráficos de Funções Afins"

Conhecimentos prévios dos alunos:

- Dízimas finitas e infinitas periódicas
- Equações do 2º grau
- Os conceitos de função, ordenada na origem e declive
- Identificar e representar uma função linear, afim ou constante
- Cálculo analítico do declive
- O paralelismo entre retas
- A reta vertical e a reta horizontal

Recursos para o professor:	Recursos para o aluno:
▪ Computador e projetor ▪ Manual escolar e Caderno de Atividades ▪ Quadro e marcador ▪ Ficha de trabalho nº4	▪ Material de desenho e escrita ▪ Manual escolar e Caderno de Atividades ▪ Ficha de trabalho nº4

Metodologia de trabalho:

- Esclarecimento de dúvidas e discussão em grande grupo (turma).

Momentos da aula:

	Momentos da aula	Tempo previsto (em 45 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	4 min
2.º	Discussão em grande grupo e resolução da questão 4 da ficha de trabalho nº4	10 min
2.º	Esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação	30 min
3.º	Encerramento da aula	1 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças | 4 minutos

A professora fará o registo de presenças dos alunos e ditará o sumário.

2.º - Discussão em grande grupo e resolução da questão 4 da ficha de trabalho nº4 | 10 minutos

Uma vez que na aula anterior não foi possível discutir os resultados da questão 4 da ficha de trabalho nº4 a professora irá iniciar a aula com este segmento.
A professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Interpretar funções afins em contextos diversos
- Articular temas matemáticos: álgebra e geometria;
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação oral, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q4:** Enquanto a figura está projetada, a professora deve solicitar a um aluno que apresente no quadro os resultados do par, explicando como pensaram. Com o objetivo de envolver a turma e clarificar eventuais dúvidas, a professora questionará se alguém pensou de outro modo, pedindo, nesse caso, ao aluno que exponha oralmente a estratégia do par. Nesta discussão deve ficar claro para os alunos que o eixo de reflexão é uma reta que, neste caso, não passa na origem do referencial, pelo que, terá uma equação do tipo $y = ax + b$ (com a e b diferentes de zero). Assim, a professora deverá frisar que todos os pontos da figura A (em particular os vértices) estão à mesma distância do eixo de reflexão que os pontos correspondentes da figura B e que, com esta informação, conseguem identificar **dois pontos** que pertencem a este eixo, logo, determinar uma equação do eixo de reflexão.

Os alunos serão informados pela professora do modo de organização da aula bem como do seu

3.º - Esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação |30 minutos

modo de trabalho. A professora deve indicar que esta parte da aula será desenvolvida em torno do esclarecimento das eventuais dúvidas dos alunos para a ficha de avaliação.

A professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Esclarecer dúvidas para a ficha de avaliação
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados ao longo do ano letivo, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação oral, o raciocínio e a escrita matemática.

Ao questionar os alunos, a professora deve atender às dúvidas mais generalizadas sobre as temáticas trabalhadas e, caso se mostre necessário, deverá fazer uma breve explicação alargada à turma sobre algum dos tópicos trabalhados em sala de aula. A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos.

Caso os alunos não pretendam esclarecer dúvidas, devem trabalhar nas propostas sugeridas na aula anterior, como preparação para a ficha de avaliação.

Atendendo aos diferentes ritmos de trabalho dos alunos, para os que já realizaram todas as tarefas propostas, a professora deverá sugerir que realizem as questões da ficha global n.º 5 do caderno de atividades, das páginas 83 e 84.

A professora deve circular pela sala, monitorizando o trabalho dos alunos, esclarecendo eventuais dúvidas que possam surgir.

3.º Encerramento da aula | 1 minuto

A professora deverá recordar os alunos que o teste de avaliação sumativa se realiza no dia seguinte e que, para o efeito, deverão levar para a aula: folha de teste, caneta, régua e calculadora.

Formas e momentos de avaliação: Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback* e serão anotadas as participações dos alunos na grelha da turma.

Anexo 3.11 – Planificação da 11.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 11.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 131 e 132 | 28 de abril de 2016

Sumário: Realização da ficha de avaliação sumativa.

Duração da aula: 90 minutos

Objetivos:

- Mobilizar aprendizagens realizadas nos temas "Gráficos de Funções Afins", "Dízimas finitas e infinitas periódicas" e "Equações do 2º grau", abordados ao longo do ano letivo.

Conhecimentos prévios dos alunos:

- Tópicos do tema "Gráficos de Funções Afins", "Dízimas finitas e infinitas periódicas" e "Equações do 2º grau"

Recursos para o professor:	Recursos para o aluno:
▪ Ficha de avaliação sumativa	▪ Ficha de avaliação sumativa ▪ Material de desenho (régua) e escrita ▪ Folha de teste ▪ Calculadora

Metodologia de trabalho:

- Trabalho autónomo dos alunos na realização da ficha de avaliação sumativa.

Momentos da aula:

Momentos da aula		Tempo previsto (em 90 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula, registo das presenças e distribuição do enunciado da ficha de avaliação	5 min
2.º	Trabalho autónomo na realização da ficha de avaliação sumativa	85 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula e registo das presenças	**| 4 minutos**

A professora fará o registo de presenças dos alunos e distribuirá o enunciado da ficha de avaliação sumativa.

2.º - Trabalho autónomo na realização da ficha de avaliação sumativa	**|85 minutos**

Os alunos trabalharão autonomamente na ficha de avaliação sumativa.

A professora estará atenta aos alunos que habitualmente têm mais dificuldades em situação de avaliação sumativa, incentivando-os a resolver as questões do teste

A professora deverá recolher as fichas de avaliação sumativa que os alunos realizaram.

Formas e momentos de avaliação:

A realização desta ficha de trabalho será um elemento integrante da avaliação sumativa dos alunos.

Anexo 4

Ficha de Avaliação

Anexo 4 – Ficha de Avaliação

7.º Teste de Avaliação de Matemática – 8.º Ano
abril 2016

Classificação: ____________________________ por cento (____ %)

Aluno:________________________________ N.º: _____ Turma: [redacted]

Professora: ______________ **EE: ____**

Sugestão para ultrapassar as dificuldades manifestadas:

□ Estar mais atento/concentrado nas aulas.
□ Realizar com mais empenho as tarefas propostas.
□ Realizar mais vezes os trabalhos de casa.
□ Exprimir as dúvidas e dificuldades na sala de aula. Versão 1

Lê atentamente todas as questões. Justifica sempre que necessário todas as respostas. Apresenta todos os cálculos que efetuar. Nas questões de escolha múltipla escolhe apenas uma das opções apresentadas, se escolheres mais do que uma opção a questão será anulada.

Não podes usar corretor.

1. Explica, de duas formas distintas, por que razão o número $\frac{11}{30}$ não possui representação em dízima finita:

1.1. Utilizando o algoritmo da divisão.

1.2. Mostrando que não pode ser dado por uma fração decimal.

2. Efetua a decomposição decimal do número racional $23{,}217$.

3. Representa na reta numérica o número racional **1,1(6)** começando por representá-lo na forma de **fração** e em seguida como **numeral misto**.

4. Resolve as seguintes equações:

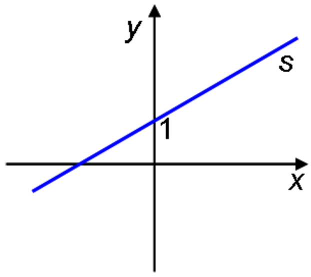
4.1. $2x^2 - 72 = 0$

4.2. $3x^2 + 4 = x^2 + 4$

4.3. $(x + 4)^2 - 9 = 0$

5. Na figura está representada uma reta s, gráfico da função f, com declive $\frac{1}{3}$ e que interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0\ ,\ 1)$.

Indica uma expressão algébrica para a função f.



6. Considera as seguintes retas dadas pelas respetivas equações:

Reta r: $y = 2x + 5$; Reta s: $y = -2x + 7$;
Reta t: $y = 2x + 3$; Reta v: $y = -2x + 1$

Duas retas paralelas são, por exemplo:

(A) r e s **(B)** r e v

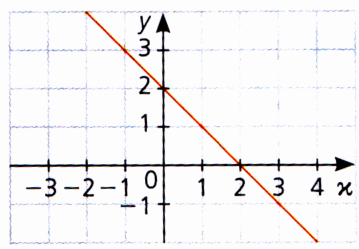
(C) r e t **(D)** t e s

7. Determina o declive da reta ***EF*** sabendo que, num determinado referencial ortogonal e monométrico, se tem:

7.1. $E(2\ ,\ 5)$ e $F(4\ ,\ 5)$

7.2. $E(2\ ,\ 5)$ e $F(7\ ,\ -3)$

8. Qual é a expressão algébrica da função representada graficamente no referencial cartesiano?

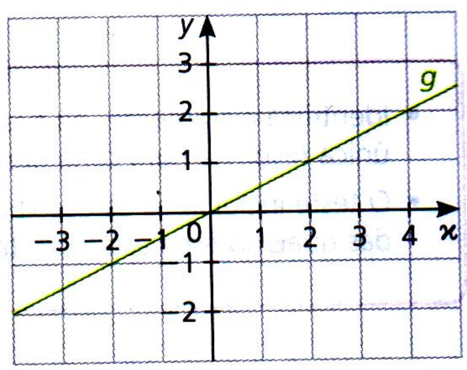


(A) $y = -x + 2$ **(B)** $y = 2x + 2$

(C) $y = -x - 2$ **(D)** $y = 2x - 1$

9. Considere duas funções ***f*** e ***g***. Em baixo, encontram-se a expressão algébrica de f e, ao lado, uma representação gráfica de ***g***.

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 5$$



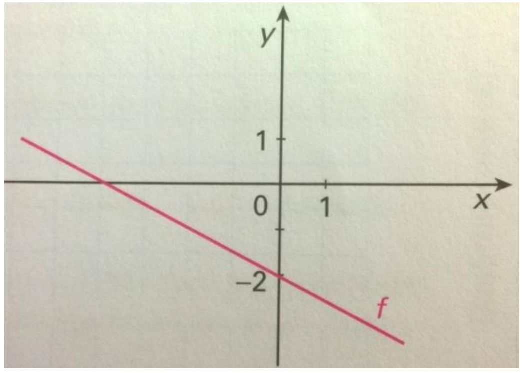
9.1. Qual é o declive da reta que representa a função ***g***?

9.2. Escreve a expressão algébrica da função ***g***.

9.3. As retas que representam as funções ***f*** e ***g*** são concorrentes ou paralelas? Justifica a tua resposta.

10. Na Figura pode observar-se a reta que representa graficamente a função ***f***. Sabe-se que

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + b$$

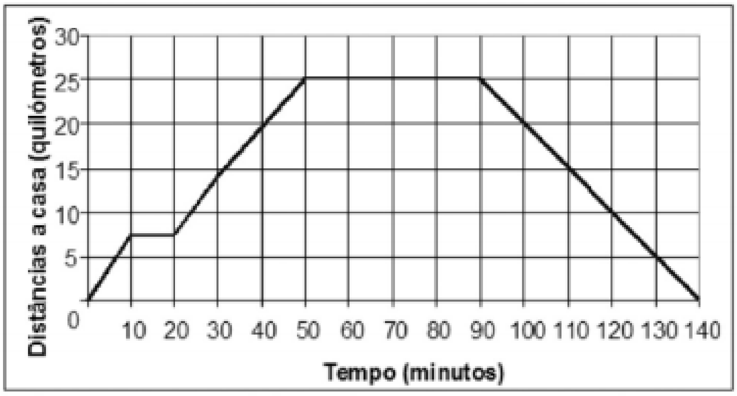


10.1. Escreve a expressão algébrica que define a função ***f***.

10.2. Escreve a equação de uma reta paralela à reta da função ***f*** , cuja ordenada na origem seja um número inteiro positivo.

11. No sábado, o Luís combinou encontrar-se com uns amigos no Pavilhão da escola, para verem um jogo de andebol. Saiu de casa, de moto, às 10horas e 30 minutos. Teve um furo, arranjou o pneu rapidamente e, depois, reuniu-se com os amigos.

O gráfico representa as distâncias a que o Luís esteve da sua casa, em função do tempo, desde que saiu de casa até ao seu regresso.



Atendendo ao gráfico, responde às questões, apresentando todos os cálculos que efetuares.

11.1. Quanto tempo levou o Luís a arranjar o furo?

11.2. A que horas encontrou os amigos?

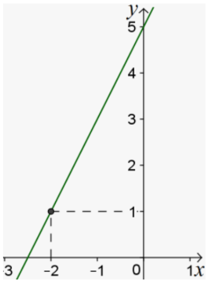
11.3. A que horas chegou a casa?

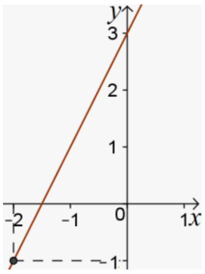
11.4. O jogo de andebol tinha dois períodos, com a duração de 20 minutos cada, e um intervalo de 5 minutos entre os dois períodos. Explica como podes concluir, pela análise do gráfico, que o Luís não assistiu ao jogo todo.

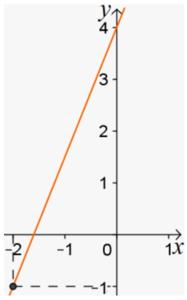
11.5. Seja ***g*** a função que representada pelo gráfico, determina ***g***(90) e explica o significado no contexto da situação.

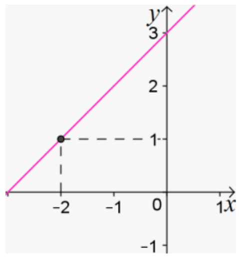
11.6. A que distância de casa se encontrava o Luís 2 horas e 10 minutos após ter saído de casa? Explica como chegaste à tua resposta

12. **Qual das retas** representadas nos gráficos seguintes **passa pelo ponto de coordenadas (-2, 1)** e tem **ordenada na origem 3**?

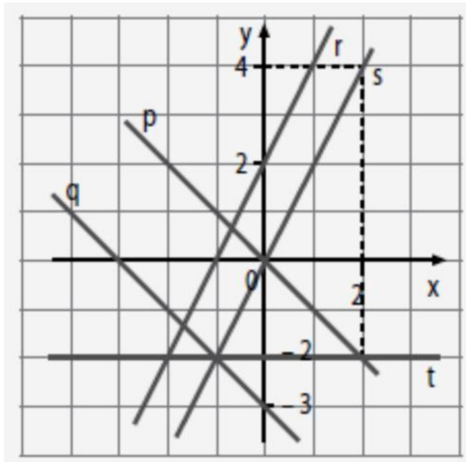
(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

13. Observa o referencial ao lado.



13.1. Associa a cada uma das funções representadas abaixo **a letra que designa a reta** que lhe corresponde:

(1) $y = 2x$: _____ (2) $y = x$: _____ (3) $y = -2$: _____

(4) $y = 2x + 2$: ______ (5) $y = -x - 3$: ______

13.2. Indica:

a) as funções **afins**;

b) as funções **lineares**;

d) o **declive e a ordenada na origem** da função $y = 2x + 2$.

c) duas funções com o **mesmo declive**.

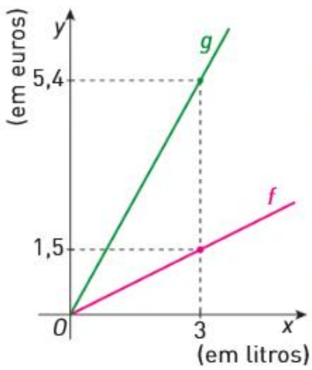
14. Considera a equação literal $E = mc^2$

Pode afirmar-se que:

(A) $m = \frac{c^2}{E}$ **(B)** $m = \frac{E}{c^2}$ **(C)** $m = \frac{c^2 E}{2}$ **(D)** $m = \frac{E}{c}$

15. Numa frutaria é possível comprar sumo natural de laranja e refrigerante.

No referencial da figura estão representadas duas funções:



- A função f relaciona o preço, em euros, com a quantidade de refrigerante, em litros;

- A função g relaciona o preço, em euros, com a quantidade de sumo natural, em litros.

15.1. Representa as funções f e g através de expressões algébricas.

15.2. A Joana comprou 2,5 litros de refrigerante e 1 litro de sumo natural. Quanto pagou?

15.3. A Carla gastou em refrigerante 4,50 euros. Com o mesmo valor, que quantidade de sumo natural poderia comprar?

15.4. Na frutaria há a possibilidade de comprar o sumo natural numa embalagem própria, tendo a embalagem um preço fixo, não dependendo da quantidade de sumo comprado. Seja h a função que relaciona a quantidade de sumo natural com o preço a pagar, incluindo a embalagem. Sabe-se que $h(x) = 1{,}8x + 1{,}5$

15.4.1. Qual é o preço de cada embalagem?

15.4.2. Determina a abcissa do ponto que pertence ao gráfico de h e tem ordenada 8,7.

Anexo 5

Autorizações

Anexo 5.1 – Pedido de Autorização à Direção da Escola

Exmo. Sr.
Diretor do Agrupamento de Escolas de Caneças

Eu, Nicole Duarte de Jesus, mestranda em Ensino da Matemática, e estagiária na Escola Secundária de Caneças, sob a orientação da Professora de Matemática Anabela Candeias, venho, por este meio, solicitar autorização para realizar um projeto de investigação em educação com a turma do 8.º [redacted] Este trabalho de cariz investigativo, intitulado "Resolução de problemas com a função afim em diferentes contextos", integra-se no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

O referido projeto terá por base a lecionação da subunidade "Gráficos de Funções Afins", no início do 3.º período escolar, ao longo de 18 tempos de 45 minutos. O estudo tem como principal objetivo compreender de que forma os alunos se apropriam do conceito de função afim, e como o aplicam na resolução de problemas, evidenciando as suas estratégias e representações.

Para a concretização deste trabalho de cariz investigativo será fundamental a recolha de dados, como: os documentos produzidos pelos alunos durante as atividades em aula; a transcrição de algumas das interações entre alunos, em sala de aula; a transcrição de entrevistas que possam vir a ser realizadas aos alunos, fora do contexto sala de aula; e a eventual videogravação de aulas que se destina a servir de base de trabalho no âmbito da referida investigação, não sendo divulgada por nenhuma forma a terceiros. Deste modo, serão endereçados pedidos de autorização aos Encarregados de Educação dos alunos desta turma, com a informação sobre esta investigação, garantindo que será salvaguardado o anonimato dos alunos participantes.

Caneças, 24 de fevereiro de 2016
Pede deferimento,

____
(Nicole Jesus)

Anexo 5.2 – Comunicado à Diretora de Turma

Exma. Sra.
Diretora de Turma do 8.º [redacted]

Eu, Nicole Duarte de Jesus, mestranda em Ensino da Matemática, e estagiária na Escola Secundária de Caneças, sob a orientação da Professora de Matemática Anabela Candeias, venho, por este meio, comunicar que a turma do 8.º [redacted] irá participar num estudo, no âmbito da unidade de ensino "Gráficos de Funções Afins", durante o 3.º período escolar, ao longo de 18 tempos de 45 minutos. Este estudo, autorizado pela Direção da Escola a ____ de fevereiro de 2016, integra-se no meu trabalho final do Mestrado em Ensino de Matemática, que estou a realizar no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Mais comunico que, a Coordenação do Departamento de Matemática, os alunos e os Encarregados de Educação serão também informados do objetivo e parâmetros deste estudo. Saliento ainda que a participação neste estudo não acarretará qualquer inconveniente para os alunos, podendo sim, constituir uma motivação suplementar para a aprendizagem deste tema, que faz parte do Programa de Matemática do 8.º ano.

A concretização deste trabalho implicará uma recolha de dados, como: os documentos produzidos pelos alunos durante as atividades em aula; a transcrição de algumas das interações entre alunos, em sala de aula; a transcrição de entrevistas que possam vir a ser realizadas aos alunos, fora do contexto sala de aula e a eventual videogravação de aulas que se destina a servir de base de trabalho no âmbito da referida investigação, não sendo divulgada por nenhuma forma a terceiros. Deste modo, serão endereçados pedidos de autorização aos Encarregados de Educação dos alunos desta turma, garantindo que será salvaguardado o anonimato dos alunos participantes.

Desde já agradeço, sinceramente, a colaboração de todos os intervenientes.

Caneças, _____ de fevereiro de 2016
A Mestranda em Ensino da Matemática,

____
(Nicole Jesus)

Tomei conhecimento,

____
(A Diretora de Turma do 8.º [redacted])

Anexo 5.3 – Comunicado à Coordenadora de Departamento

Comunicado

Exma. Sra.
Coordenadora do Departamento de Matemática

Eu, Nicole Duarte de Jesus, mestranda em Ensino da Matemática, e estagiária na Escola Secundária de Caneças, sob a orientação da Professora de Matemática Anabela Candeias, venho, por este meio, comunicar que a turma do 8.º [redacted] irá participar num estudo, no âmbito da unidade de ensino "Gráficos de Funções Afins", durante o 3.º período escolar, ao longo de 18 tempos de 45 minutos. Este estudo, autorizado pela Direção da Escola a _____ de fevereiro de 2016, integra-se no meu trabalho final do Mestrado em Ensino de Matemática, que estou a realizar no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Mais comunico que, a Diretora de Turma do 8.º [redacted], os alunos e os Encarregados de Educação serão também informados do objetivo e parâmetros deste estudo. Saliento ainda que a participação neste estudo não acarretará qualquer inconveniente para os alunos, podendo sim, constituir uma motivação suplementar para a aprendizagem deste tema, que faz parte do Programa de Matemática do 8.º ano.

A concretização deste trabalho implicará uma recolha de dados, como: os documentos produzidos pelos alunos durante as atividades em aula; a transcrição de algumas das interações entre alunos, em sala de aula; a transcrição de entrevistas que possam vir a ser realizadas aos alunos, fora do contexto sala de aula e a eventual videogravação de aulas que se destina a servir de base de trabalho no âmbito da referida investigação, não sendo divulgada por nenhuma forma a terceiros. Deste modo, serão endereçados pedidos de autorização aos Encarregados de Educação dos alunos desta turma, garantindo que será salvaguardado o anonimato dos alunos participantes.

Desde já agradeço, sinceramente, a colaboração de todos os intervenientes.

Caneças, _____ de fevereiro de 2016
A Mestranda em Ensino da Matemática,

____
(Nicole Jesus)

Tomei conhecimento,

____
(A Coordenadora do Departamento de Matemática)

Anexo 5.4 – Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação

Exmo. Sr.

Encarregado de Educação do(a) aluno(a) da turma do 8.º[redacted]

Eu, Nicole Duarte de Jesus, mestranda em Ensino da Matemática, e estagiária na Escola Secundária de Caneças, sob a orientação da Professora de Matemática Anabela Candeias, venho por este meio comunicar que a turma do 8.º [redacted] irá participar num estudo, ao longo das primeiras 11 aulas do 3.º período escolar, no âmbito da unidade de ensino "Gráficos de Funções Afins". Este estudo, intitulado "Resolução de problemas com a função afim em diferentes contextos", visa compreender de que forma os alunos se apropriam do conceito de função afim, e como o aplicam na resolução de problemas, evidenciando as suas estratégias e representações. O referido estudo, autorizado pela Direção da Escola, integra-se no Mestrado em Ensino de Matemática, que estou a realizar no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Mais se esclarece que a participação neste estudo não acarretará qualquer inconveniente para os alunos, podendo sim, constituir uma motivação suplementar para a aprendizagem deste tema, que faz parte do Programa de Matemática do 8.º ano. Para a sua concretização será essencial a participação voluntária dos alunos, bem como, o consentimento dos respetivos Encarregados de Educação (preenchendo e assinando a ficha anexa, a entregar à Professora de Matemática da turma).

Para a realização deste trabalho será imprescindível a recolha de documentos produzidos pelos alunos em sala de aula (como fichas de trabalho e tarefas), a transcrição de algumas audiogravações, em contexto de sala de aula, e a transcrição de eventuais entrevistas aos alunos, as quais poderão decorrer, pontualmente, num horário favorável para os alunos e combinado com os respetivos Encarregados de Educação. As aulas serão também registadas em vídeo mas as imagens e documentos recolhidos destinam-se unicamente a servir de base de trabalho no âmbito da referida investigação, não estando sujeitas a qualquer tipo de divulgação posterior, garantindo-se o anonimato quer dos alunos quer da escola.

Desde já agradeço, sinceramente, a colaboração de todos os intervenientes.

Caneças, 24 de fevereiro de 2016
A Mestranda em Ensino da Matemática,

____

(Nicole Jesus)

Autorização

Eu, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) ______________________________, n.º ____, da turma 8.º [redacted], tomei conhecimento dos objetivos do estudo a realizar no âmbito da unidade de ensino "Gráficos de Funções Afins" que envolverá a turma, no âmbito da disciplina de Matemática, ao longo do 3.º Período, e _________________________ (autorizo/ não autorizo) a participação do meu educando, com a garantia da sua privacidade e anonimato.

Relativamente à gravação de imagens das aulas, apenas para análise neste estudo, _______________________ (autorizo/não autorizo) que envolvam o meu educando, salvaguardando a sua privacidade e anonimato.

Quanto à realização de entrevistas, _______________________ (autorizo/não autorizo) que envolvam o meu educando, salvaguardando a sua privacidade e anonimato.

_____ de ___________ de 2016

O(A) Encarregado(a) de Educação

____

Anexo 6

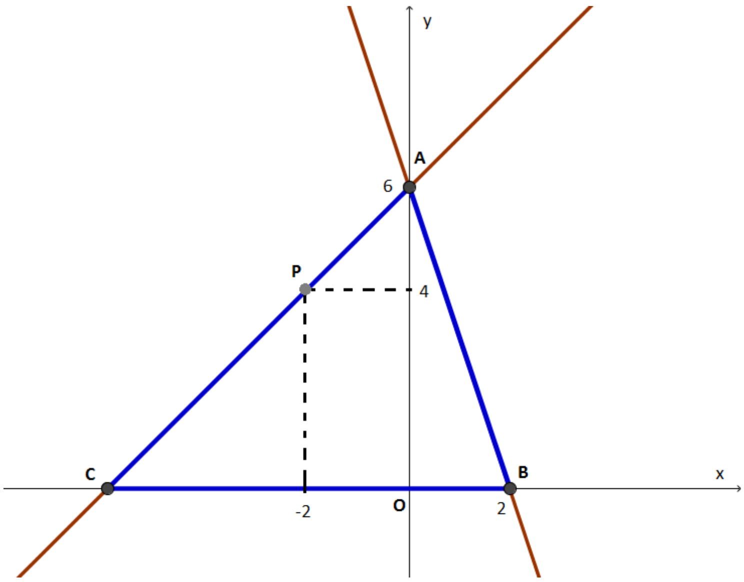
A Entrevista

Anexo 6.1 – Tarefa proposta na entrevista

Matemática 8.º Ano	Data: ______.maio.2016 Aluno:______________________________ N.º: _____ Turma: _____

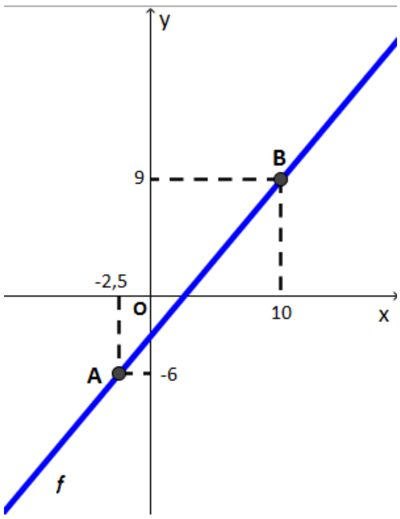
1. Considera o triângulo $[ABC]$ e um ponto P que se encontra sobre o lado $[AC]$ deste triângulo, como representado na figura seguinte.

   Calcula a área do triângulo $[ABC]$, explicando a tua resposta.



2. Seja f a função representada no referencial da figura seguinte.

   Escreve a equação de uma reta concorrente ao gráfico da função f. Explica a tua resposta.



Anexo 6.2 – Guião da Entrevista

Explicar aos alunos que não se trata de uma situação de avaliação e que terão o *software* GeoGebra à disposição, caso entendam utilizar o recurso.

<u>Questão 1</u>

-Qual é a base do triângulo que estão a considerar? Qual a altura?

-Que dados conhecem? Que dados precisam? Que dados vos faltam conhecer?

-Questionar o que significa cada um dos termos da equação da reta.

-Qual a ordenada do ponto C? Como podemos conhecê-la?

-A reta AC é a representação gráfica de uma função de que tipo?

-Como podemos escrever a equação da reta AC?

-Qual é a ordenada na origem da reta AC? [se calcularem o b, perguntar: Porque é que é necessário calcular o b? Porquê?]

-Como determinaste a medida do comprimento da base?

-[Após concluírem a resolução]

Como poderíamos escrever a equação da reta que suporta o lado CB do triângulo?

<u>Questão 2</u>

-Que dados conhecem sobre essa reta?

-Como poderá ser uma reta concorrente a essa?

-Que características terão de ter as expressões algébricas para que as retas possam ser concorrentes?

-Se as retas fossem paralelas que características teriam as suas expressões algébricas?

-Graficamente, o que significa terem declives diferentes?

-[Caso calculem o declive da reta AB e determinem o b] Para este problema será importante determinar a ordenada na origem? Porquê?

-[Após concluírem a resolução]

Uma reta vertical seria concorrente a essa reta? Porquê?

Podes dar um exemplo de uma reta vertical que fosse concorrente à reta AB? Podem dar mais exemplos?

-[Caso utilizem o GeoGebra]

Porque optaram por recorrer ao GeoGebra?